

ממלבן הזהב לסדרת פיבונאצ'י

עופר ליבה

עריכה, השלמות והבאה לדפוס:
בת שבע אילני | אנטולי שטרקמן

From the Golden Rectangle to the Fibonacci Sequences

Opher Liba

Edited, added content and exercises and submitted for publication:

Bat-Sheva Ilany and Anatoly Shtarkman

כתיבה: עופר ליבה

עריכה והשלמות: בת שבע אילני ואנטולי שטרקמן

הוצאת הספרים של מכון מופ"ת:

עורך ראשי: דודו רוטמן

עורכים ומביאים לדפוס: בת שבע אילני ואנטולי שטרקמן

עורכת טקסט ולשון: מיכל קירזנר-אפלבוים

עורך גרפי: דניאל בריסקמן

מעצבת העטיפה: מאיה זמר-סמבול

ציור השער: אורית גיגוזינסקי

חברי הוועדה האקדמית:

פרימה אלבז–לוביש, אילנה אלקד-להמן, חנוך בן-פזי, יעל דר, יורם הרפז,

נצה מובשוביץ-הדר, אייל נווה, דורון נידרלנד, יעל פישר, שי פרוגל

מסת"ב: 978-965-530-162-5

© כל הזכויות שמורות למכון מופ"ת

טל' 03-6901406 <http://www.mofet.macam.ac.il>

עשינו כמיטב יכולתנו לאתר את בעלי הזכויות של כל חומר ששולב בספר ממקורות חיצוניים. אנו מתנצלים על כל השמטה או טעות. אם יובאו אלה לידיעתנו, נפעל לתקן במהירות הבאות.

דפוס: אופסט טל בע"מ

תוכן העניינים

תודות 8

מבוא 11

א. דברי פתיחה: ד"ר עוזי ערמון 13

ב. פנייה אישית לקוראים: עופר ליבה 16

ג. רקע על מלבן הזהב ועל סדרות פיבונאצ'י:

ד"ר בת-שבע אילני וד"ר אנטולי שטרקמן 21

ד. בעיית פתיחה: פרדוקס לואיס קרול: האם $1 = 0$? 30

פרק 1: מלבן הזהב ומספר הזהב 33

א. מלבן הזהב ויחס הזהב 35

ב. תכונות מספריות של ϕ 39

ג. החבורה של מספרי- ϕ 42

ד. מטריצות ואיזומורפיזם 46

ה. הנורמה של מספרי- ϕ 50

תרגילים לפרק 1 53

פרק 2: משולשי זהב 79

א. משולש זהב רחב ומשולש זהב צר 81

ב. הזוויות במשולשי הזהב 82

ג. יחסי שטחים 84

ד. פנטגון ופנטגרם 85

תרגילים לפרק 2 88

פרק 3: סדרת פיבונאצ'י 95

- א. סדרת פיבונאצ'י והחזקות של מספר הזהב 97
- ב. הנוסחה של בינה 99
- ג. קשרים מרכזיים בין איברי הסדרה 101
- ד. סכומים 104
- ה. הרחבת הסדרה 105
- ו. מטריצות וסדרת פיבונאצ'י 108
- תרגילים לפרק 3 113

פרק 4: סדרת לוקאס 131

- א. שלוש הגדרות לסדרת לוקאס 133
- ב. הקואליציה של פיבונאצ'י ולוקאס 134
- ג. החזקות של מספר הזהב 137
- ד. סכומים 139
- תרגילים לפרק 4 142

פרק 5: הסדרות הפיבונאצ'יות הכלליות 155

- א. הגדרות, נוסחאות בינה וקשרים 158
- ב. בין סדרה פיבונאצ'ית לבין סדרת פיבונאצ'י 163
- ג. סדרה לוקאסית של סדרה פיבונאצ'ית 164
- ד. בין סדרה פיבונאצ'ית לבין סדרה לוקאסית 167
- ה. סדרת-על של סדרה פיבונאצ'ית 169
- ו. החזקות של מספר הזהב 171
- ז. מיון של הסדרות הפיבונאצ'יות 172
- תרגילים לפרק 5 176

פרק 6: בעקבות עופר - משימות חקר:

187	ד"ר אנטולי שטרקמן וד"ר בת-שבע אילני
190	משימה 1 : פונקציות ממעלה 1, 2, 3 עם פרמטר
191	משימה 2 : אנלוגיה
192	משימה 3 : משפחת פונקציות עם מקדמים פיבונאצ'יים
	משימה 4 : סכום שתי סדרות גיאומטריות
192	בעלות בסיסים מרוכבים צמודים
193	משימה 5 : חקירת משפחה של פונקציות
193	משימה 6 : סדרות המוגדרות באמצעות שורש מספר הזהב
194	משימה 7 : קומבינציה ליניארית של שתי הסדרות
194	משימה 8 : סכום שתי סדרות גיאומטריות ממשיות
	משימה 9 : סדרות מרוכבות אשר מבוססות
195	על החזקות של מספר הזהב
196	משימה 10 : פונקציות "היפרבוליות-פיבונאצ'יות"
197	משימה 11 : חיתוך מלבן
198	משימה 12 : "קטלוג" של משולשים
199	משימה 13 : חיתוך ריבועים
201	ריכוז ההגדרות, המשפטים והנוסחאות
216	מספרי פיבונאצ'י ולוקאס
218	רשימת ספרות מומלצת ומוארת
223	אתרים מהמרשתת
226	חוות דעת על הספר
229	זכויות יוצרים לתמונות ולאיוורים



עופר ליבה ז"ל, 1953-2016

קוראים יקרים,

מעבר לעניין ולהנאה שוודאי תפיקו מספר זה, עבור המשפחה, עצם יציאתו לאור היא אירוע מרגש ומיוחד. עופר כתב ספר זה במשך שנים ארוכות, אך לא זכה להוציא אותו לאור. בילדותו ובנעוריו בילה עופר שנים רבות במדינות שונות ברחבי העולם במסגרת השליחות הדיפלומטית של אביו. במהלך לימודיו בבתי הספר התיכוניים של מערכת החינוך הצרפתית בטוגו ובסנגל, עופר פגש את המתמטיקה והתאהב בה. עם שובו ארצה, הוא החל ללמוד הנדסת חשמל בטכניון והשלים תואר במתמטיקה באוניברסיטה העברית בירושלים. לאחר מותו של עופר, התנדבו, בהובלת ד"ר בת-שבע אילני, מספר ידידים מסורים להשלמת המלאכה: ד"ר אנטולי שטרקמן, יצחקי נתיב, אריה רוקח וגידי שינהולץ. הם השקיעו שעות רבות בעריכת הספר, בהוספת פרקים, בהשלמתו ובהוצאתו לאור בעברית ובאנגלית.

המשפחה

תודות

דברי תודה שכתב עופר בכתב היד של הספר

עופר ליבה ז"ל החל לעבוד על כתיבת הספר בשנת 1994. את כתב היד עופר הוציא בשנת 2006 ורק עכשיו, בשנת 2019, לאחר מותו בטרם עת יוצא הספר לאור.

בכתב היד כתב עופר את דברי התודות הבאים :

רבים הם אלה (לאו דווקא מהמתמטיקה או מהחינוך המתמטי) אשר התעניינו, עודדו, פרגנו ותמכו, כל אחד בדרכו ובסגנונו וכל אחד במידה זו או אחרת. לכולם נתונה תודתי.

תודה לאנשי המתמטיקה והחינוך המתמטי אשר הקדישו מזמנם ועיינו בגרסאות המוקדמות, העבירו הערות והצעות וכתבו חוות דעת מרגשות: ד"ר בת-שבע אילני, פרופ' רון אהרוני, רותי ברקאי, ד"ר אביקם גזית, נתן הרפז, פרופ' גרייסי ויניצקי-לנדמן, יגאל זלצר, נגה חרמון, ד"ר פבל סטיאנוב, ד"ר מירה עופרן, מרגרט פרויס, גרשון (ג'רי) רוזן, אריה רוקח.

תודה מיוחדת :

- לד"ר עוזי ערמון, על דברי הפתיחה והצגת הספר.
- לפרופ' עזריאל לוי, על שלל ההערות וההצעות.
- לפרופ' בנו ארבל, על הצעות דידקטיות נבונות.
- לפרופ' נצה מובשוביץ-הדר, על עצות לשיפור ה"שיחה" עם הקוראים ולעיצוב רשימת המקורות.
- לד"ר מייקל פריד, על חוות דעת מפורטת וביקורתית, שבעקבותיה הוכנסו שיפורים רבים.

- לדב היימן, חברי מספסל הלימודים בפקולטה למתמטיקה, על הבדיקה של הטקסט והתרגילים.
- ללאה שלם, על התיקונים הלשוניים שערכה בכתב היד. (כל מה שהחלטתי להשאיר "בכל זאת" הוא על אחריותי!)
- לאבי היקר משה ליבה, על התמיכה והעידוד.
- למארק זפראן (מרטין וינקלר), על התמיכה והעידוד.
- לנחמה פרסטר, אוצרת מיל"י באגף הנוער של מוזיאון ישראל, שם הכול התחיל... (1994).
- לרחל רוזנברג, מנהלת היחידה להשתלמויות באוניברסיטת בן-גוריון, ולמשתלמים (2002).
- לד"ר אנטולי שטרקמן, ראש החוג למתמטיקה במכללת לוינסקי לחינוך, על הקורס הסמינריני שיזם והעביר בשנת הלימודים 2006-2007, ולסטודנטיות ולסטודנט (שעבדו קשה...).
- למרי-פול ישראל, על החומר ממקורות צרפתיים, המרובה בכמות ובאיכות.
- לדן מייזלר, תלמידי הצעיר והמוכשר, על שהתנסה בפועל בחלקים נרחבים של הספר.
- לעו"ד מיכאל שטיינר, על הייעוץ הכללי והמשפטי.
- למייק כהן, מנהל דפוס "יובל", על העצות המקצועיות ועל הדפסת הטיוטה לספר.
- מעל לכול: תודה ליקרים שלי אירית, ענבל ודרור, אשר להם אני מקדיש את הספר – באהבה.

תודות מאת עורכי הספר

ברצוננו להודות לכל העושים במלאכה שאפשרו להפוך את כתב היד לספר ולהוציאו לאור :

תודה מיוחדת ליצחקי נתיב שהשקיע שעות רבות, העיר, האיר ותמך לאורך כל הדרך, ותודה לגידי שינהולץ ולאריה רוקח שעברו על הספר ושתמכו.

תודה לצוות הוצאת הספרים של מכון מופ"ת ולד"ר יהודית שטיימן שתמכו בהוצאת הספר ושליחו את תהליך הפקתו. תודה מיוחדת לחני שושתרי, רכזת הוצאת הספרים, שעשתה עבודה נהדרת; לדניאל בריסקמן על העבודה הגרפית המסורה והביצוע היפה; למכללת שאנן ולמכללת תלפיות על התמיכה הכספית בהוצאת הספר ולאורית גיגוזינסקי על האיור לעטיפת הספר ועל האיורים בתוך הספר.

מבוא



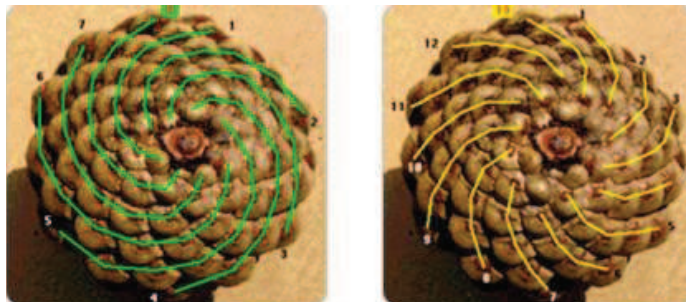
סדרת פיבונאצ'י על אצטרובל

תבניות שמתאימות לסדרת פיבונאצ'י מופיעות בטבע בעצמים רבים ושונים, כגון קונכיות של חלזונות, אצטרובלים, סידור העלים והענפים על הגבעול ועוד.

הקשקשים על האצטרובל מסודרים בצורה ספירלית כדי לאפשר חשיפה מיטבית של הקשקשים לשמש. אילו הזווית בין שני קשקשים סמוכים הייתה למשל 180 מעלות, הקשקש השני היה צומח בכיוון הנגדי, אבל הקשקש השלישי היה צומח מעל הקשקש הראשון ומסתיר לו את השמש. אם נקטין את הזווית יותר מדי, תהיה חפיפה בין הקשקשים והם יסתירו זה את זה. היחס בין מספרי פיבונאצ'י שואף ליחס הזהב. אם נחלק 360 מעלות במספר זה (שערכו כ-1.618), נקבל זווית בגודל של כ-222.5 מעלות, או 137.5 מעלות אם נסתובב לכיוון ההפוך. זווית זו מאפשרת

לקשקשים החדשים לצמוח ברווחים שבין הקשקשים שמתחתיהם, ועקב כך מופיעים מספרי פיבונאצ'י בצמחים.

נציין שבאצטרובל יש שני כיוונים שונים שסדרות פיבונאצ'י מופיעות בהם.



שני כיווני סידרת פיבונאצ'י על אצטרובל

הפרק כולל:

- א. דברי פתיחה מאת ד"ר עוזי ערמון
- ב. פנייה אישית לקוראים מאת עופר ליבה
- ג. רקע על מלבן הזהב ועל סדרות פיבונאצ'י מאת ד"ר בת-שבע אילני וד"ר אנטולי שטרקמן
- ד. בעיית פתיחה: פרדוקס לואיס קרול: האם $1 = 0$?

א. דברי פתיחה

ד"ר עוזי ערמון

ספרו של עופר ליבה לוקח אותנו לטיול מרתק באחד התחומים המתמטיים היפים ביותר ומציג מידע רב בקשר למספר הזהב ולסדרת פיבונאצ'י. הוא מתחיל בהיכרות עם מספר הזהב $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ותכונותיו, כמו למשל $\varphi^2 = \varphi + 1$ או $1 - \varphi = \frac{-1}{\varphi}$ או $\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$. משם הוא עובר להיכרות עם משולשי זהב (משולשים שווי שוקיים שהיחס בהם בין הצלעות השונות הוא φ) ועם תכונותיהם, כגון קיומם במחומש משוכלל. בהמשך מגיעים ל"מחוזות סדרתיים": מסדרות פיבונאצ'י ולוקאס ועד לסדרות פיבונאצ'יות ולוקאסיות. לסדרות אלה יש תכונות מגוונות, כמו נוסחת קאסיני $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$ או הנוסחאות $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ ו- $F_{2n} = L_n F_n$, וגם מתקיימים קשרים מפתיעים עם מספר הזהב, כמו: $\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1}$.

בנוסף לכך, הספר מציג באופן מרתק את המתמטיקה שנלמדת בבית הספר התיכון, תוך שימת דגש על עקרונות היסוד של מתמטיקה אמיתית, כמו אסתטיקה (למשל בצורות הגיאומטריות), רבגוניות בעשייה המתמטית (בניגוד לזו המבקשת פתרון אחד ויחיד), גישת החקר (לגילוי חוקים, הכללות, קשרים), הוכחות ידידותיות (אפשר להבין את הצורך בהן, לעקוב אחריהן ואפילו לגלותן לבד), אתגרים מחשבתיים (למשל בפרדוקסים) ופתרון בעיות (בדגש על שיטות חשיבה). בהקדמה שכתב, המחבר אכן מדגיש את חשיבות היופי של התבניות המתמטיות ושל הרעיונות המתמטיים. לתפיסתו, יופיים הוא מבחנם החשוב ביותר.

תרומתו הגדולה של הספר, מעבר להצגת שפע ומגוון התכנים הקשורים למספר הזהב ולסדרת פיבונאצ'י, היא בבניית סביבת למידה מתמטית עשירה פעילויות ומטלות. שימוש בסביבת למידה עשירה הוא רעיון חינוכי רב עוצמה לשיפור ההוראה בכלל ולשיפור ולרענון הוראת המתמטיקה בפרט. סביבה כזו הכרחית להשגת שתי מטרות-על חינוכיות המשולבות זו בזו. מטרות-על אחת היא **החופש ללמוד**, כשם ספרו של קארל רוג'רס. סביבת למידה עשירה בפעילויות מספקת לכל לומד ולומדת את החופש לבחור את דרך הלמידה המתאימה להם, את הנושאים המעניינים אותם, את המטלות המסקרנות אותם, הכול לפי נטיות ליבם. החופש ללמוד חשוב ביותר, הן כדי לטפח את היצירתיות הטמונה בכל אחד מהלומדים, הן כדי לשפר את ההניעה שלהם והן כדי להנעים להם את הלמידה האמיתית. **למידה אמיתית** היא מטרות-העל החינוכית השנייה. הכוונה היא לפעילות עצמית ועצמאית המתבצעת עם אחריות אישית של הלומד או הלומדת. למידה כזו מושגת באמצעות פעילויות רבות, כגון קריאת חומר רלוונטי, חקירת הנושא הנלמד, התמודדות עם מטלות חשיבה, השוואת התשובות לפתרונות מוכנים ועוד. למידה אמיתית בסביבת למידה עשירה בפעילויות עשויה לאפשר את הבניית המידע הנקלט ואת הפיכתו לידע מובן ובעל משמעות.

אכן, לספר זה יש פוטנציאל לסייע בשינוי של דרכי הוראת המתמטיקה ולמידתה. הוא מאפשר למידת מתמטיקה המבוססת על קריאת טקסט מתמטי, גישה שכמעט אינה מקובלת אצלנו. גישה כזו עשויה לסייע להשגת הבנה אמיתית של תכנים מתמטיים. לדוגמה, חקירת הסדרות הקשורות לסדרת פיבונאצ'י יכולה לשפר את הבנת מושגי הסדרה והטור. כיום רבים מבינים ש"סדרה" היא מושג מופשט (קבוצה מכוונת של מספרים), בעוד שהמושג "טור" עוסק בסכום הסדרה. למעשה, המושג "סכום סדרה" מתייחס לסדרת הסכומים החלקיים של סדרה, וסדרה זו היא

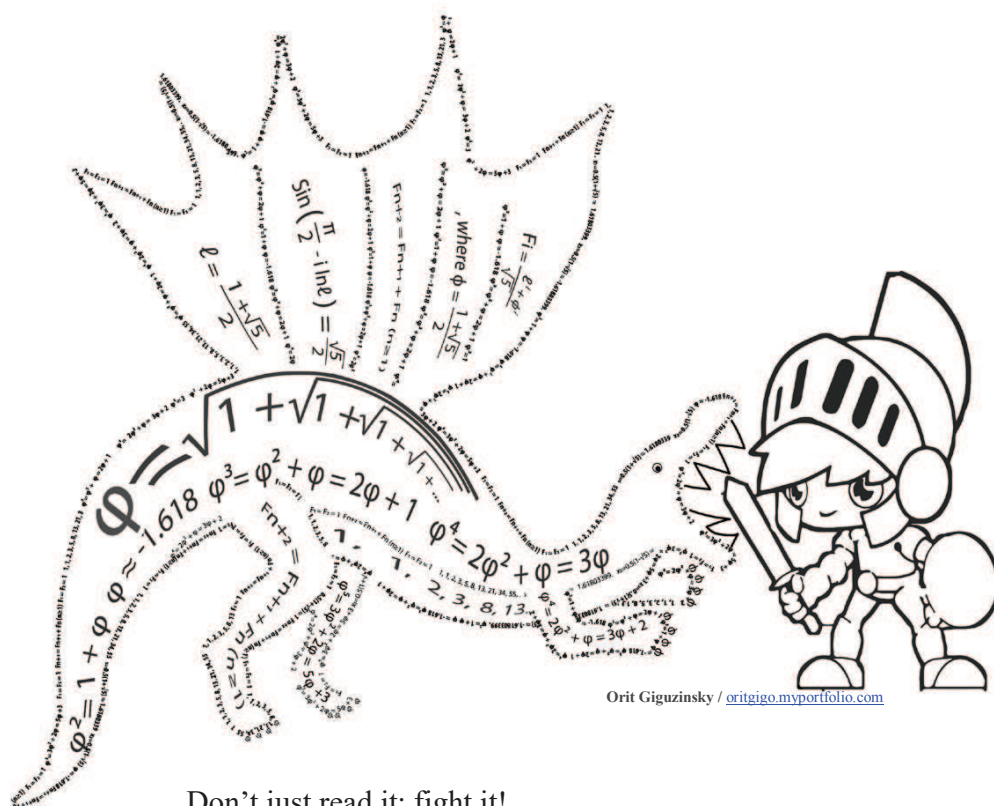
מקרה פרטי של סדרה שנוצרת מסדרה כלשהי. מכל סדרה נוצרים "ילדים" רבים: סדרת ההפרשים (בסדרה חשבונית זו סדרה קבועה), סדרת המנות (בסדרה גיאומטרית היא קבועה, ובסדרת פיבונאצ'י היא סדרה השואפת לגבול – מספר הזהב), סדרת הריבועים, סדרת מכפלות כל שני שכנים ועוד.

באופן ההולם את העיסוק ב"זהב", ספרו של עופר ליבה מצטיין בעושר. העושר מתבטא הן במגוון התחומים המתמטיים השזורים בספר, הן בשפע הפעילויות (חלקן בפרקים וחלקן בתרגילים) והן בקשרים בין התחומים המתמטיים השונים כפי שהם מתבטאים באחד הנושאים המתמטיים היפים, הקסומים והמפתיעים ביותר.

ד"ר עוזי ערמון ז"ל, היה חבר סגל במכללת כנרת, שלוחת אוניברסיטת בר-אילן

ב. פנייה אישית לקוראים

עופר ליבה



Don't just read it; fight it!

--- Paul R. Halmos

ספר זה מבוסס על מחקר עצמאי ממושך, והוא מיועד לקשת רחבה של קוראים: תלמידים מוכשרים בבית הספר התיכון, נוער שוחר מדע, מצטיינים ומחוננים, סטודנטים למתמטיקה ולהוראת מתמטיקה באוניברסיטאות ובמכללות, סטודנטים במכללות הטכנולוגיות, מורים למתמטיקה, חוקרים לעתיד ובאופן כללי – לכל אוהבי המתמטיקה. ברצוני לפנות כעת לשתי קבוצות עיקריות של קוראים: הלומדים והמורים.

כמה מילים ללומדים

לספר הנוכחי מטרות לימודיות רבות. אמנה כמה מהן :

- להתוודע אל אחד הנושאים היפים במתמטיקה ולפתח את המודעות ליופי מתמטי באופן כללי.
- לחזק את הידע המתמטי התיכוני ולהרחיבו וכן לאפשר הצצה אל כמה נושאים אקדמיים.
- להמחיש ולהנחיל ערכים של מחקר מתמטי: תצפית מתמטית, השערה, הוכחה, יישום, הכללה והעלאת שאלות חדשות.
- להתמודד עם סוגיות ספציפיות ביותר מדרך אחת (ראו למשל: סכום של סדרת פיבונאצ'י, בפרקי הספר ובתרגילים).
- לעורר סקרנות ורצון לחקור ולהרחיב, מעבר למה שמופיע בספר.

לספר מאפיינים דידקטיים מיוחדים :

- התקדמות הנושאים היא מהמוחשי למופשט ולכללי.
- הספר כולל מעל 200 תרגילים (מתוכם 60 כבר בפרק הראשון). זאת מתוך אמונה שלתרגול רב ומגוון יש ערך עצום בלימוד מתמטיקה, בדיוק כמו בלימוד נגינה למשל. מטרת התרגילים היא להפנים את הנלמד בפרקים השונים, לחדד ולהרחיב סוגיות נבחרות ולהכין תשתית להמשך. רוב התרגילים חוברו במיוחד לצורך ספר זה. בסיום כל אחד מפרקי התרגילים מוצעים תשובות, רמזים ופתרונות חלקיים.
- כדי לעודד אתכם ללמידה עצמית יעילה ובעיקר פעילה, בחלק מהפיתוחים, השלבים וההוכחות שבספר הנכם מתבקשים **להשלים פרטים ושלבים חסרים**. הם הושארו כך במכוון! ככלל, ראוי להדגיש שקריאה נכונה של טקסט מתמטי

- אינה דומה כלל לקריאת רומן. היא חייבת להיות "מלווה בנייר ובעיפרון". המתמטיקאי המפורסם פול הלמוס (Paul Halmos, 1985) אמר: "אל תסתפקו בקריאה, צאו לקרב! שאלו שאלות, חפשו דוגמאות, גלו הוכחות משלכם." ההתמדה והמאמץ יביאו לידי הבנה מעמיקה, סיפוק והנאה!
- בטקסט ובחלק מהתרגילים מופיעות נוסחאות ("קשרים") רבות. כדאי מאוד לבצע המחשבות מספריות לנוסחאות אלה באמצעות הטבלה שבסוף הספר ("מספרי פיבונאצ'י ולוקאס") ו/או בעזרת מחשבון, אולם הדרך הטובה ביותר לעשות זאת היא באמצעות גיליון אלקטרוני.
 - גם בפרקי הספר וגם בתרגילים מופיעות הפניות רבות להגדרות ולנוסחאות, שכולן ממוספרות. לנוחותכם, כל ההגדרות והנוסחאות מרוכזות בסוף הספר.

למורים/למורצים

- בפנייתי למורים אני מבקש להפנות את הזרקור להיבטים הבאים של הספר:
- הספר מקשר באופן מכוון בין הנושאים השונים הנדונים בו לבין (כמעט) כל הנושאים אשר נלמדים בבית הספר התיכון ברמה של 5 יחידות לימוד.
 - הספר מכיל מספר לא קטן של הוכחות מקוריות (ביניהן: הוכחה פשוטה וקצרה לנוסחת בינה באמצעות גיאומטריה אנליטית, הוכחת התכונות של סדרת פיבונאצ'י באמצעות השוואת מקדמים רציונליים ועוד), מושגים וכלים מיוחדים כגון מספרי- φ , $\delta(a,b)$, מטריצות $M(a,b)$, סדרה לוקאסית של סדרה פיבונאצ'ית, סדרת-על של סדרה פיבונאצ'ית ועוד, ואולי גם תוצאות חדשות.
 - דגש מיוחד הושם על הקשר ההדוק בין הסדרות הנדונות לבין מספר הזהב וחזקותיו, ובין הסדרות לבין עצמן. הניתוח של סדרת לוקאס ושל הסדרות הפיבונאצ'יות (פרקים 4, 5) הוא מורחב ושיטתי.

כמה מילים לכם המורים על הנגשת הספר לתלמידים: כדאי לעודד את הלומדים להתמודד עם כל התרגילים או לפחות עם רובם, וכן להשלים פרטים ושלבים חסרים בטקסט. כמו כן, כדאי מאוד לשבח הוכחות מקוריות וגישות שונות לטיפול באותה בעיה.

אם זו ההתנסות הראשונה של הלומדים בחומר על-תיכוני, זו הזדמנות מצוינת לדרוש מהם להקפיד על כתיבה תקינה של הוכחות, הן מבחינה מתמטית והן מבחינה לשונית, וכך לעורר אצלם מודעות לחשיבות העניין. כתיבה כזו משקפת יחס של כבוד כלפי המתמטיקה, השפה והקוראים גם יחד. כמו כן, היא מועילה ללומדים עצמם, שכן כתיבה תקינה ובהירה מחזקת חשיבה תקינה ובהירה.

מבנה הספר וסדר הפרקים מאפשרים להעביר את הנושאים במתכונות שונות:

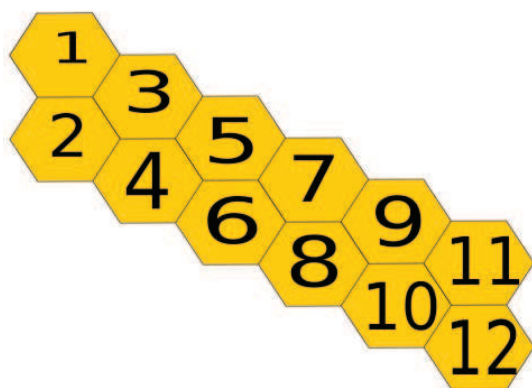
- קורס בסיסי וקצר על מספר הזהב יכלול את שני הסעיפים הראשונים של הפרק הראשון ואת התרגילים 1 עד 50.
- קורס בסיסי ארוך יותר יכלול את שני הפרקים הראשונים.
- קורס מקיף על מספר הזהב וסדרת פיבונאצ'י יכלול את שלושת הפרקים הראשונים.
- קורס מקיף על מספר הזהב ועל הסדרות של פיבונאצ'י ולוקאס יכלול את ארבעת הפרקים הראשונים.
- קורס "מקסימלי" יכלול גם את הפרק החמישי, אשר דורש מאמץ מיוחד.
- קורס תרבותי בין-תחומי יכלול תכנים נבחרים מספר זה ובנוסף לכך יישומים במדעי הטבע והחיים, בטכנולוגיה, באומנות ובאדריכלות, ואולי גם רקע היסטורי. תכנים אלה מופיעים בחלק מהמקורות ברשימה הביבליוגרפית ובאתרים רבים במרשתת (רשימה נבחרת של אתרים מופיעה בסוף הספר).

לו תהי ההנאה מנת חלקכם !

עופר ליבה

רשימת מקורות

Halmos, P. R. (1985). *I want to be a mathematician*. Washington: Mathematical Association of America Spectrum.



בכמה דרכים שונות ניתן להגיע למספר 6 ?

ג. רקע על מלבן הזהב ועל סדרות פיבונאצ'י

בת-שבע אילני ואנטולי שטרקמן

רבות נכתב בארץ ובעולם על מלבן הזהב ועל סדרת פיבונאצ'י. למספרי פיבונאצ'י יש תכונות רבות ומעניינות. ספרים שלמים נכתבו עליהם ואף קיים כתב עת מתמטי, The Fibonacci Quarterly (<http://www.fq.math.ca>), שמוקדש כולו לתגליות של מספרי פיבונאצ'י ולהכללות שלהם. כמו כן, נוסדה אגודת פיבונאצ'י (<http://www.mathstat.dal.ca/fibonacci>) שמטרתה לגלות מופעים חדשים של סדרת פיבונאצ'י.

ספר זה מציג מבט מיוחד מההיבט המתמטי על חתך הזהב ועל מספרי פיבונאצ'י. הוא מתחיל בחתך הזהב ומגיע ממנו אל סדרת פיבונאצ'י. נפתח את הספר בהצצה קצרה על ההיסטוריה של פיבונאצ'י ועל ההגדרות של מספרי פיבונאצ'י וחתך הזהב. ליאונרדו פיבונאצ'י נולד בסביבות שנת 1170 בפיזה שבאיטליה. הוא רכש השכלה רחבה במקצועות כמו אריתמטיקה, גיאומטריה, אסטרונומיה, לוגיקה ועוד. פיבונאצ'י נדד בין ארצות שונות עם אביו, שעסק בגביית מיסים ועמלות עבור סחורות מיובאות. בין היתר, ב-1192 הוא היה באלג'יר ולמד מהערבים את שיטת הספירה ההודית שהומצאה על ידי אלחואריזמי וטרם זכתה אז להכרה באירופה. במסגרת מסעותיו עם אביו, הוא למד בבגדד, במצרים, בסוריה ובספרד את המתמטיקה היוונית והכיר את התרבות הערבית ואת תרומתה החשובה למתמטיקה. בשובו לפיזה בשנת 1200 בערך, לימד פיבונאצ'י מתמטיקה עד שנות השלושים של אותה מאה (ארבל, 2009; גזית, 2004).

בסביבות שנת 1200 הציג פיבונאצ'י בעיה הקשורה להתרבות אוכלוסיית הארנבות, בעיה שממנה נגזרה הסדרה שעתידה להיקרא על שמו. הוא עשה זאת

כתרגיל מתמטי מעניין. בסופו של דבר, הסתבר שמספרי פיבונאצ'י מופיעים בטבע, למשל בצופן גנטי של דני"א ובסידור עלי כותרת של צמחים כגון חמניות. בנוסף לכך, ממוצע יחסי המרחקים בין הפלנטות במערכת השמש לבין השמש עצמה הוא מספר השווה בקירוב לחתך הזהב. היחסים בין החלקים של טבעות הכוכב שבתאי מקיימים אף הם יחס דומה.

פיבונאצ'י, שכתב חמישה ספרי מתמטיקה, התעניין בעיקר בתורת המספרים. הוא תיאר את הסדרה שלימים תכונה בשם "סדרת פיבונאצ'י", בספרו *Liber Abacci* (ספר החשבונייה) שיצא לאור בשנת 1202. בספר זה מופיעה החידה העוסקת בהתרבות של ארנבות:

מכניסים לכלוב סגור זוג ארנבות צעירות. הארנבות מגיעות לבגרות בחודש השני לחייהן ומתחילות להמליט צאצאים בסוף אותו חודש. מאז ואילך, כל זוג ממליט בסוף כל חודש זוג ארנבות חדש (זכר ונקבה). כל זוג ארנבות שמגיע לחודש השני לחייו, ממליט גם הוא זוג של גורי ארנבות בסוף כל חודש. בהנחה שאין תמותה של ארנבות, כמה זוגות יהיו בכלוב בתחילת כל חודש?

בתחילת החודשים הראשון והשני יהיה בכלוב זוג אחד של ארנבות צעירות, בתחילת החודש השלישי יהיו בכלוב שני זוגות (הזוג המקורי המליט זוג ארנבות בסוף החודש השני), בתחילת החודש הרביעי יהיו שלושה זוגות (הזוג המקורי המליט זוג נוסף בסוף החודש השלישי, ואילו הזוג השני טרם המליט), בחודש החמישי יהיו חמישה זוגות, וכן הלאה.

אם נרשום את מספר הארנבות בכלוב כסדרה של מספרים, נקבל את הסדרה הבאה:

1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , 233 ...

פיבונאצ'י ציין בספרו שזו סדרה מיוחדת, מכיוון שכל מספר בסדרה הוא סכום של שני המספרים הקודמים לו.

חודש	דור							סכום זוגות הארנבות בשורה (מתקבלת סדרת פיבונאצ'י)
	1	2	3	4	5	6	7	
1	1							1
2	1							1
3	1	1						2
4	1	2						3
5	1	3	1					5
6	1	4	3					8
7	1	5	6	1				13
8	1	6	10	4				21
9	1	7	15	10	1			34
10	1	8	21	20	5			55
11	1	9	28	35	15	1		89
12	1	10	36	56	35	6		144
13	1	11	45	84	70	21	1	233
14	1	12	55	120	126	56	7	377

התרבות הארנבות לפי דורות

(ניתן למצוא קשרים מעניינים בטבלה)

כלומר, **סדרת פיבונאצ'י** היא סדרה ששני איבריה הראשונים הם 1, 1 וכל איבר לאחר מכן שווה לסכום שני קודמיו. בהתאם לכך, איבריה הראשונים של הסדרה הם: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 ...

הגדרה רקורסיבית של הסדרה מופיעה בפרק השלישי של הספר, "סדרת פיבונאצ'י". הסדרה אומנם כבר הייתה מוכרת למתמטיקאים הודים, אולם המתמטיקאי אדוארד לוקאס (1842-1891) העניק לה את השם "סדרת פיבונאצ'י". לוקאס גם מצא תכונות מעניינות שבזמנו עדיין לא היו ידועות (להרחבה בנושא ראו הפרק הרביעי בספר, "סדרת לוקאס").

היחס בין שני איברים עוקבים של סדרת פיבונאצ'י שואף ליחס הזהב, שהוא מספר אי-רציונלי שערכו $1.61803398\dots$, כפי שהראה לראשונה יוהנס קפלר. יחס הזהב מושג בקירוב טוב כבר באיבר ה-11 של סדרת פיבונאצ'י:

$$\frac{89}{55} = 1.61818\bar{18}$$

באיבר ה-16, הדיוק משתפר לרמה של 5 ספרות אחרי הנקודה העשרונית:

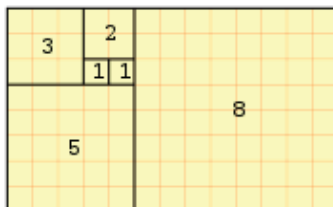
$$\frac{987}{610} = 1.61803\dots$$

אחת ההצגות הגיאומטריות של הסדרה מתחילה בריבוע שאורך צלעו 1, כגודל האיבר הראשון, ומתווספים לו ריבועים באופן הבא:

לריבוע הראשון מתווסף ריבוע נוסף בגודל 1×1 . שני הריבועים יוצרים מלבן שרוחבו 1 ואורכו 2 (האיברים 1, 1, 2 בסדרה).

בשלב הבא נוסיף ריבוע בגודל 2×2 , ונקבל מלבן בגודל 3×2 . תוספת של ריבוע בגודל 3×3 תוביל למלבן בגודל 5×3 . הבנייה על ידי הוספת ריבוע שצלעו כאיבר פיבונאצ'י, יוצרת מלבן שצלעותיו הן שני איברי פיבונאצ'י עוקבים.

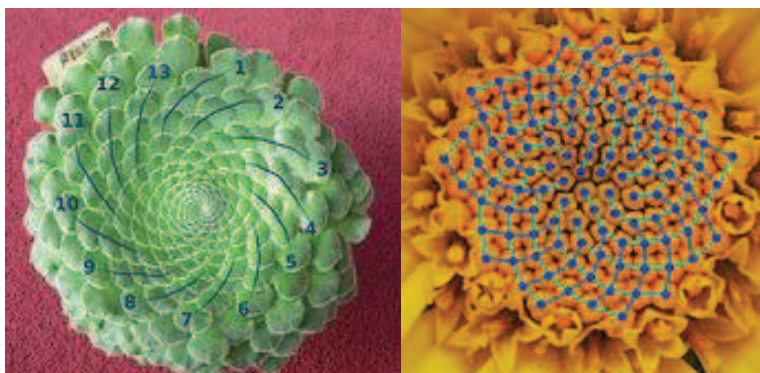
בהמשך הבנייה, המלבנים מתקרבים יותר ויותר למלבן הזהב, שהוא מלבן שהיחס בין צלעותיו הוא יחס הזהב: 1.618 בקירוב. ליחס הזהב ולמלבן הזהב יש מופעים שונים בטבע, באדריכלות ובאומנות.



מלבני הסדרה



קוביות פיבונאצ'י



סדרות פיבונאצ'י בטבע

סדרות פיבונאצ'י מופיעות בתרבות פופולרית, לא פעם באופן מפתיע. למשל, סוחרים בבורסה מאמינים שהשוק מתנהג בצורה שמזכירה מאוד את היחס בין מספרי פיבונאצ'י.

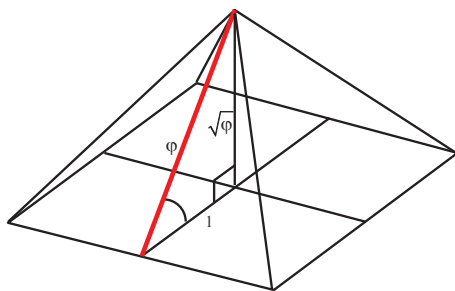
מספרי פיבונאצ'י מופיעים בהרבה סרטים למשל "צופן דה וינצ'י" (שמבוסס על הספר של דן בראון), "פאיי" - המתאר את קורותיו של מתמטיקאי גאון שמאמין שאפשר לחזות את השוק בבורסה בעזרת מספרי פיבונאצ'י, ו-"המפגש" - סרט מדע בדיוני. יש חוקרים הסבורים שהתפתחות האנושות מזכירה את סדרת פיבונאצ'י. ספרי קריאה רבים מתייחסים לסדרת פיבונאצ'י. לדוגמה ספר שקיבל את פרס הבוקר (Main Booker price) בשנת 2013: "המאורות" שנכתב על ידי אלינור קטון. בספר יש שימוש במספרים ההופכיים למספרי פיבונאצ'י.

ישנן יצירות מוסיקליות שמשמשות במספרי פיבונאצ'י. למשל אצל המלחין ההונגרי בלה ברטוק (Bela Barok) השתמש בסדרת פיבונאצ'י עבור הקצב של פתיחה של קונצרט : 11235853211.....

יחס הזהב נחשב באומנות כפרופורציה המושלמת והיפה ביותר שאדם יכול לתאר. אומני הרנסנס בתחום הציור, הפיסול והאדריכלות השתמשו בפרופורציות אלה כדי להשיג את מה שנחשב בימיהם ליופי המושלם. בציורים של לאונרדו דה וינצ'י ושל אמנים גדולים אחרים בני זמנו אפשר למצוא בשפע פרופורציות של חתך הזהב. המתמטיקאי האיטלקי לוקה פאצ'ולי חיבר את הספר *De divina proportione* ("על הפרופורציה האלוהית") שעוסק ביחס הזהב. הספר נכתב במילאנו בשנים 1496-1498 ופורסם בוונציה ב-1509. אייר אותו לאונרדו דה וינצ'י. גם איש הרנסנס פיירו דלה פרנציסקה כתב ספר על אודות יחס הזהב.

נטען כי השימוש ביחס הזהב החל כבר באדריכלות של יוון העתיקה
(https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%99%D7%97%D7%A1_%D7%94%D7%96%D7%94%D7%91).
יש הטוענים שמבנים קלסיים כגון הפרתנון באתונה נבנו ביחס קרוב ליחס הזהב,
אם כי חלק מהמומחים מפקפקים בכך וטוענים כי אפשר למדוד את הפרתנון בדרכים
אחרות, וכי הקביעה שיחס הזהב היה מעורב בבנייה היא שרירותית ולא ניתנת
להוכחה.

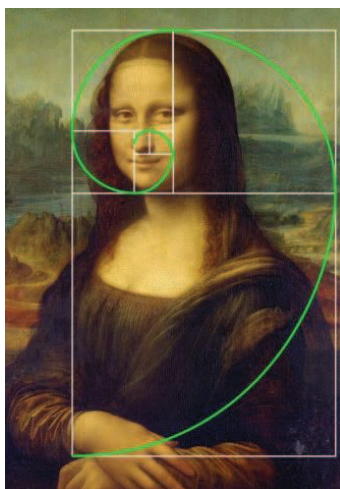
כמו כן, יש הטוענים שאפשר לראות את יחס הזהב גם במבנה הפירמידה הגדולה
של גיזה, שהיחס בה בין גובה הפירמידה לבסיסה הוא 1.618 ויחס הגבהים בין הראש
לרגל לבין המרחק מהטבור לרגל הוא 1.618. יש המנסים לראות את יחס הזהב
גם בממדיו של ארון הברית, שהיחס בין אורכו לרוחבו הוא 1.66 (אמתיים וחצי
לאמה וחצי).



הפירמידה הגדולה בגיזה

בימי הביניים נעשה שימוש ביחס הזהב באדריכלות האסלאמית. לדוגמה, לפי
הסברה כיפת הסלע בירושלים נבנתה במידות פרופורציונליות מדויקות התואמות את
יחס הזהב, אם כי קיים קושי להראות כי אכן מדובר ביחס הזהב.

בציור המפורסם של לאונרדו דה וינצ'י, ה"מונה ליזה", יש הטוענים שאפשר למדוד יחס זהב מדויק הן בפנים של המונה ליזה והן בציור כולו. גם בציור "הירונימוס הקדוש" משנת 1483 השתמש דה וינצ'י ביחס הזהב. בציור נראה הירונימוס הקדוש כשהוא יושב ולמרגלותיו אריה. הירונימוס הקדוש עצמו תחום במלבן זהב.



המונה ליזה

גם כיום משתמשים במלבן הזהב באדריכלות ובגרפיקה. בעולם נבנו כמה בניינים מודרניים לפי יחס הזהב. כך למשל, היחס בין גובהו של בניין האו"ם בניו יורק (152 מטרים) לבין רוחבו (95 מטרים) הוא היחס 1.621, שקרוב מאוד לחתך הזהב.



פיבונאצ'י באדריכלות - מבנה ספירלי בגרם המדרגות בוותיקן

רשימת מקורות

ארבל, ב' (2009). מתמטיקאים ואירועים גדולים בתולדות המתמטיקה. תל אביב: מכון מופ"ת.

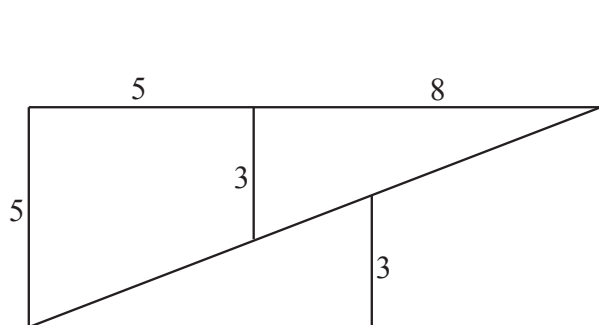
גזית, א' (2004). מצאתי! על אנשים שאהבו לחשוב ולחשב. הרצליה: גייסט.

ליביו, מ' (2003). חיתוך הזהב – קורותיו של מספר מופלא. תל אביב: אריה ניר.

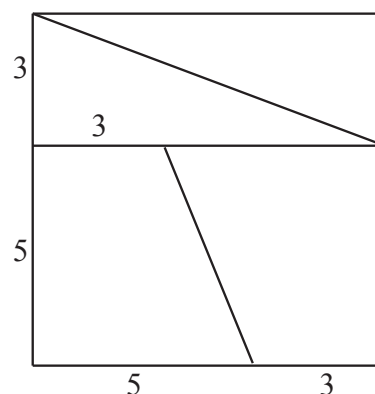
קוסטא, מ' (1990). חתך הזהב, חותם שלמה ומגן דוד. תל אביב: ספרית פועלים.

ד. בעיית פתיחה: פרדוקס לואיס קרול: האם $1 = 0$?

נחתוך ריבוע בעל צלע באורך 8 יחידות אורך לשני משולשים זהים ולשני טרפזים זהים כמתואר באיור 1, ונצרף את ארבעת החלקים למלבן שאורכי צלעותיו הם 5 ו-13 יחידות אורך, כמתואר באיור 2.



איור 2



איור 1

שטחו של הריבוע הוא 64 יחידות שטח, ושטחו של המלבן הוא 65 יחידות שטח, לכן (הרי שתי הצורות מורכבות מאותם חלקים ממש): $64 = 65$, כלומר $1 = 0$! כל המתמטיקה נהרסת...

אפשר לומר שהפרדוקס הוויזואלי הזה מעלה שתי שאלות. השאלה הראשונה היא: היכן ה"בלוף"? על כך אפשר לענות בקלות יחסית. השאלה השנייה היא: מדוע הפרדוקס עובד יפה כל כך? התשובה לשאלה זו דורשת ידע מעמיק בסדרת פיבונאצ'י (על כך נרחיב בפרק 3 ובפרק 6).

נשים לב שאורכי הצלעות שליד הזוויות הישרות, בכל הצורות שבאיורים – המשולשים, הטרפזים, הריבוע והמלבן – הם 3, 5, 8 ו-13 יחידות אורך, ומדובר ברביעייה של איברים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י (רביעי עד שביעי). ככל שניקח רביעייה עוקבת "רחוקה יותר" בסדרה, אחיזת העיניים תהיה "מושלמת" יותר. בשלב זה נסתפק באמירה שהפרדוקס קשור באופן הדוק לנוסחת קאסיני:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

F_n הוא האיבר הכללי של סדרת פיבונאצ'י (שנפגוש בפרק השלישי).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

הפרדוקס קשור גם לעובדה ש-

(φ) הוא מספר הזהב, ואותו נפגוש כבר בפרק הראשון).

כעת, הבא נצא לדרך !