

# **פרקטים**

**בשנתמטיקה פוגשת  
מדע, טבע ואומנות**

**ליורה נוטוב**  
**עטרה שריקי**      **לובה ויסוצ'אנסקי**  
האקדמיה גורדון      מכללת סמינר הקיבוצים

# **Fractals: When Mathematics Meets Science, Nature, and Art**

**Liora Nutov, Atara Shriki, Luba Visochansky**

**כתיבת: ליורה נוטוב, עטרה שרייקי, לובה ויסוצ'אנסקי**

**הוצאת הספרים של מכון מופ"ת:**

**עורכת ראשית: תמי ישראל'**

**עורכת אקדמית: בלה יעבץ**

**עורכת לשון ותוכן: מיכל קירזנר-אפלביום**

**עורכת ומעצבת גרפית: בלה טאובר**

**עיצוב העטיפה: גיא הוד ובלה טאובר, על בסיס יצירה של ליורה נוטוב**

**חברי הוועדה האקדמית של הוצאת הספרים:**

**פרימה אלבז-לובייש, אילנה אלקד-להמן, חנוך בן-פזי, יעל דר, יורם הרפז,**

**נצה מובשוביץ-הדר, אייל נווה, יעל פישר, שי פרוגל**

**עשינו כמיטב יכולתנו לאתר את בעלי הזכויות של כל חומר**

**שהשולב בספר מקורות חיצוניים. אנו מתנצלים על כל**

**השמטה או טעות. אם יובאו אלה לדייעתנו, נפעל לתקן**

**במהדורות הבאות.**

**מסת"ב: 978-965-216-5**

**© כל הזכויות שמורות ולייצירות שמורות לako"m וליווצרים**

**© כל הזכויות שמורות למכון מופ"ת, תשפ"ג/2023**

**טל': 03-6901428 <http://www.mofet.macam.ac.il>**

**הדפסה: דפוס הנצחון**

## **תוכן העניינים**

<b>מבוא .....</b>	<b>7</b>
הזמןה למסע .....	7
מבנה הספר .....	10
רשימת מקורות .....	11
<b>פרק ראשון: פרקטלים - נעים להכיר!</b> .....	<b>15</b>
הקדמה: لأن נעלמה האנטנה של הטלפון הנייד? .....	17
פרקטים - תעודת זהות .....	22
כיצד יוצרים פרקטל לניארי? .....	28
א. יצירה פרקטלים לניארים באמצעות גריעת .....	29
ב. יצירה פרקטלים לניארים באמצעות גריעת והחלפה .....	32
ג. יצירה פרקטלים באמצעות הוספה .....	34
פסק זמן פרקטלי: להשתעשע עם פרקטלים .....	37
משימות להעמקת הידע בנושא זיהוי פרקטלים ומיניהם .....	39
משימה 1: מיאון צורות - פרקטלים ולא פרקטלים, חלק א .....	41
משימה 2: מיאון צורות - פרקטלים ולא פרקטלים, חלק ב .....	42
משימה 3: השלמה וסידור של שלבים בבנייה פרקטל .....	43
משימה 4: בניית פרקטל בהתאם לכללים .....	44
משימה 5: השלמת שלבים בבנייה פרקטל עץ .....	44
פתרונות למשימות .....	46
רשימת מקורות .....	54
רשימת מקורות עבור האיורים המופיעים בפרק הראשון .....	56
רשימת מקורות עבור האיורים המופיעים במשימות .....	57
<b>פרק שני: חוקרם את הפרקטלים .....</b>	<b>61</b>
הקדמה: מידת היקף ושטח .....	63
היכן יבנה רובינזון קרויז את הצריח שלו על האי המרובע של קווד? .....	66
אלדין מתעופף על שטיח שרפינסקי .....	74
פסק זמן פרקטלי: לבנות פרקטלים .....	80
משימות להעמקת הידע בנושא שטחים והיקפים .....	81
משימה 1: המשמעות של היקף, משטח, מידת היקף ושטח .....	83
משימה 2: קשרים בין מידת היקף של מצולעים לבין שטחם .....	84

משימה 3: חישוב שטח ומידת היקף של טבעת.....	85 .....
משימה 4: בניית הדרגתית של צורה וחישוב מידת היקפה ושטחה .....	86 .....
משימה 5: צורה אחת או שתי צורות?.....	87 .....
משימה 6: בניית צורות בעזרת מלבנים חופפים .....	87 .....
משימה 7: קבוצת קנטור .....	88 .....
משימה 8: משולש שרפינסקי .....	89 .....
משימה 9: שטיח שרפינסקי .....	91 .....
משימה 10: העקום של קוֹך .....	93 .....
משימה 11: פתית השלב של קוֹך .....	95 .....
משימה 12: האי המרובע של קוֹך .....	97 .....
משימה 13: פרקטל הריבוע המוחומש.....	100 .....
פתרונות למשימות .....	101 .....
רשימת מקורות עבור האירורים המופיעים בפרק השני .....	118 .....
רשימת מקורות עבור האירורים המופיעים במשימות .....	119 .....
<b>פרק שלישי: למה דומה דמיון עצמי?</b> .....	121 .....
הקדמה.....	123 .....
מי דומה לי? .....	125 .....
האם אני דומה לעצמי? .....	129 .....
מיון פרקטלים בהתאם לתכונה "דמיון עצמי" .....	137 .....
פסק זמן פרקטלי: לעבוד ולהיות עם פרקטלים .....	142 .....
משימות להעמקת הידע בנושא דמיון עצמי .....	144 .....
משימה 1: זיהוי צורות בעלות דמיון עצמי ומיון צורות .....	145 .....
משימה 2: מיון פרקטלים על פי סוג הדמיון העצמי .....	146 .....
פתרונות למשימות .....	147 .....
רשימת מקורות .....	151 .....
רשימת מקורות עבור האירורים המופיעים בפרק השלישי .....	151 .....
רשימת מקורות עבור האירורים המופיעים במשימות .....	153 .....
<b>פרק רביעי: על ממדים שלמים ושבורים .....</b>	155 .....
הקדמה: מה בין מפות, גבולות, מלחמות ופרקטלים? .....	157 .....
על ממדים וחופש התנועה .....	160 .....
לסביר את הממד .....	167 .....
ממד האוסדורף עבור פרקטלים בעלי דמיון עצמי מוחלט .....	169 .....
כשהאוסדורף פגש את אוקלידס .....	169 .....

כשהואסדורף פוגש את מנדלבווט .....	172
ממד הדמיון העצמי של האי המרובע של קוֹך .....	174
ממד הדמיון העצמי של משולש שרפינסקי ושל שטיח שרפינסקי .....	175
ממד הדמיון העצמי של קבוצת קנטור .....	178
כשהואסדורף פוגששוב את אוקלידס .....	178
כשミニקובסקי החליט לספר משבצות .....	179
ספרים משבצות לאורך קו החוף של בריטניה .....	181
ספרים משבצות לאורך העקום של קוֹך .....	183
אז מהו בעצם פרקטל? .....	186
הגדרת המושג "פרקטל" .....	186
ביטויים פרקטליים בתחוםים שונים .....	187
פסק זמן פרקטלי: מציריים ומעצבים פרקטליים .....	195
משימות להעמקת הידע בנושא ממד פרקטלי .....	199
משימה 1: חישוב ממד האוסדורף של משולש שווה צלעות .....	200
משימה 2: חישוב ממד האוסדורף של מעוין ושל מלבן .....	200
משימה 3: חישוב ממד האוסדורף של פרקטליים .....	201
משימה 4: חישוב ממד האוסדורף של משולשי שרפינסקי שונים .....	202
משימה 5: חישוב ממד האוסדורף של הספג של מנגר .....	203
משימה 6: חישוב ממד האוסדורף וממד מינקובסקי של פתית השlag של קוֹך .....	204
משימה 7: חישוב ממד מינקובסקי של פרקטלים אקראיים .....	205
משימה 8: חישוב ממד מינקובסקי של קו החוף של ים המלח .....	206
פתרונות למשימות .....	207
רשימת מקורות .....	216
רשימת מקורות עבור האיורים המופיעים בפרק הרביעי .....	218
רשימת מקורות עבור האיורים המופיעים במשימות .....	220
<b>אפילוג: מסע אישי בפרקטילנדיה .....</b>	221
למה פרקטליים? התשובה של ליורה נוטוב .....	224
למה פרקטליים? התשובה של עטרה שרייק .....	227
למה פרקטליים? התשובה של לובה ויסוצ'אנסקי .....	230
רשימת מקורות .....	236
<b>סוף המסע .....</b>	237

## לזכרה של ד"ר ליורה נוטוב

ליורה אהובה,

אני זוכרת את הרגע הזה, לפניו כמעט עשר שנים, שבו אמרת לי בהתלהבות המאפיינית אותך: "בואי נכתב ספר על פרקטלים". ואני, שלמדתי לבתו ביכולת שלך לראות קדימה, נסחפתית אחר ההתלהבות המידבקת שלך. למסע שלנו ה策טרפה גם לובה.

במשך השנתיים שעמלנו בהן על כתיבת הספר, חיכית כל כך לרגע שבו תאמצי את הספר אל ליבך ותגידי לי, "את רואה, אמרתי לך שנכתב ספר על פרקטלים!" אז הנה אנחנו כאן, מחזיקים את הספר

שמगשים את החלום שלך, הספר שככלו מוקדש רק לך. לזכך. אלברט איינשטיין אמר שאיננו יכולים להגיע למקום שהוא חולמים להיות בו מחר, אלא אם כן נשנה את החשיבה שלנו היום. ליורה אהובה, בדיק כך אזכור אותך תמיד.



מתגעגעת,  
עטרה

---

## מבוא

### **הזמןה למסע**

המילה "מסע" מעוררת אצל כל אחד ואחד מאיתנו תהושים ודמיוניים מסווגים שונים. מסע יכול להתרחש במסלול קצר או ארוך, ישר או מפותל. מסע יכול להיות מהיר, וחלופין הוא יכול לאורך זמן ממושך. מסע יכול להשאיר רושם ארעוי, אך יש בכוותו גם להביע את חותמו העמוק לאורך זמן. לכל מסע מאפיינים ומטרות משלו. כל מסע מקבל פרשנות יהודית משלו, דרך עיני האדם ההולך בו.

בשנת 2016 יצאנו למסע. כשהתחלנו, לא ידענו מה עתיד להתרחש. לא ידענו לחזות מה נפגש בדרך, אילו מחשבות ותחושים יעוררו בנו המפגשים וכמה עמוקים הם יהיו. יצאנו למסע מתוך מטרה להעשיר את הידע שלנו על אודוט הוצאות הקסומות שנקרוות "פרקטלים". אומנם יצאנו בדרך כשאנו מוציידות בידע שצברנו בנושא במשך כמה שנים, אולם כבר בתחילתה הבנו שצפויים לנו

חידושים והפתעות שהמסלול שנעבור יהיה מפותל וארוך, מפעים ומרתק.

הספר שלפניכם מתאר את העולם המופלא שגילינו, את התכונות הפרקטליות שלא הכרנו, את הביטויים המגוונים של פרקטלים בתחוםים השונים ואת יישומיהם המפתיעים. אנחנו מזמינים אתכם, קוראות וקוראים, לצאת למסע בעולם שבו מתמטיקה עשרה פוגשת יופי חזותי לא שגרתי, יישומים טכנולוגיים עדכניים, תופעות טבע מגוונות ותופעות מוכרות מחיי היום-יום. אנחנו מזמינים אתכם לחוו את המסע מבعد לעדשות שתבחרו להרכיב.

אולם ראשית, ברכוננו לומר כמה מילims על טבעה של המתמטיקה בכלל ועל הגיאומטריה הפרקטלית בפרט. זה לעומת מרבית אלפיים שנה, עולם המתמטיקה מתפתח ללא הרף. לפי נתוני האגודה האמריקנית למתמטיקה (American Mathematical Society AMS - American Mathematical Reviews, שנוסף בשנת 1940 וככל מידע על כתבי עת, מאמרים וספרים בתחום המתמטיקה וכן חוות דעת של מומחים. פרסומים אלה לקוחים, בין השאר, מtower אלפי ושמונה מאות כתבי עת בינלאומיים. מדי שנה נוספים למ Lager למעלה מ-100,000 פריטים חדשים במתמטיקה, המוחלקים לכ חמישת אלפים נושאים תחת כמה קטגוריות (<http://www.ams.org/mr-database>).

אולם למרבה הצער, אופייה הדינמי והמתפתח של המתמטיקה, שהוא פועל יוצא של התמדתם של מתמטיקים ושל ממציהם לגלוות ממצאים חדשים ולהעלות שאלות חקר נוספות, איןו בא לידי ביטוי בתוכנית הלימודים הבית-ספרית. עקב לכך, רבים תופסים את המתמטיקה כתחום סגור שהכל בו כבר ידוע ולא נותר עוד מה חדש בו (Movshovitz-Hadar, 2008).

הגיאומטריה הפרקטלית היא אחת הדוגמאות לאי-נכונותה של תפיסה זו. בתחום החדש יחסית, היא פותחת אשנב למתמטיקה בת זמננו. בנוסף לכך, היא מצויה בתחום מתמיד של התפתחות והתחדשות. גיאומטריה זו החלה להתפתח במהלך המאה ה-19, עם הצגתם של אובייקטים שזכו לכינוי "מפלצות מתמטיות", וקיבלה תוקף פורמלי במחצית השנייה של המאה ה-20. את יסודות הגיאומטריה הפרקטלית פיתח בשנות השישים של המאה ה-20 המתמטיקאי היהודי בנואה מנדרברוט (Benoit Mandelbrot, 1924-2010). בvikورو בשנת 1958 בחברת IBM, מנדרברוט זיהה את הפוטנציאל של שימוש במחשב לקידום התחום שקדם עליו, והחליט לעבוד בחברה. חברת IBM סיפקה למנדלבוט תקציב, ציוד, צוות מחקר ובעיקר חופש יצירה. כל אלה אפשרו לו לחשוף את העושר החזותי הגלום בגיאומטריה הפרקטלית, תוך שהוא דוחק את המחשבים לקרה גבול יכולתם (Lesmoir-Gordon, 2018). עם פרישתו למילואות מהחברה, מונה מנדרברוט לפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת ייל שבكونטיקט, ועד יומו האחרון המשיך לפתח את הגיאומטריה הפרקטלית, תוך שהוא מגיש אותה לציבור הרחב. כיום שמו של מנדרברוט מוכר לא רק בעולם האקדמי, אלא גם מחוצה לו, תופעה שאינה שכיחה בעbor מתמטיקים.

מלבד העובדה של הגיאומטריה הפרקטלית דוגמה לתחום מתמטי חדש יחסית שמתפתח ללא הרף ומוצאת את ביטויו במגוון שימושים חדשניים שאת חלקם נדגים לאורך הספר, אנו מאמינים שהגיאומטריה הפרקטלית יכולה לשמש, לדבריו של מנדרברוט (Mandelbrot, 2002), כ"שער למתמטיקה". וכך היא יכולה להפוך לנושא מargon של תוכנית הלימודים במתמטיקה החל מגן הילדים ועד לאקדמיה. ברחבי העולם ניכרים נציגים ראשונים של שילוב הגיאומטריה הפרקטלית בתוכנית הלימודים במתמטיקה בגיל הגן (למשל, Gires, Villepoux, & Rouellé, 2014; Fraboni & Moller, 2008; Ko, 2018; Fraboni & Moller, 2008; Nutov & Shriki, 2016; Siegrist et al., 2009; Vacc, 1999; Park, 2011; Brincks, 2005; Lornell & Westerberg, 2015; Raiteri, 2005; Stanley, 1989) בחטיבת הביניים (למשל, Nutov, 2012; Siegrist et al., 2009; Vacc, 1999; Raiteri, 2005; Stanley, 1989) ובචיבה העליונה (למשל, Nutov, 2012; Siegrist et al., 2009; Vacc, 1999; Raiteri, 2005; Stanley, 1989). כמו כן, במקרים שונים בעולם אפשר

למצוא תוכניות העשרה חזק בית ספריות המשלבות תכנים מתחומי הgiומטריה הפרקטלית, ותקצר הירעה מלסקור אותן בספר זה.

מחקר ספרות שעסוק בהוראת גיאומטריה פרקטלית (Chen, 2015), עולה שמחקרים שנעשו על שילוב נושא הפרקטלים בהוראה מעידים על התלהבות מצד מורים, סטודנטים ותלמידים ועל תרומתו של העיסוק בנושא להגברת המעורבות של הלומדים בתחום הלמידה. גם ניסיונו בעבודה עם מורים (Shriki ו Nutov, 2016; Nutov & Shriki, 2017; Shriki & Nutov, 2019) מלמד שמורים מגלים סקרנות רבה וענין גדול בלימוד נושאים מתחומי הgiומטריה הפרקטלית וכן בשילובם בהוראה.

מעבר לעניין ולהתלהבות, חוקרים בתחום החינוך המתמטי מצבעים על כך שלימוד הגיאומטריה הפרקטלית מסייע לתלמידים להכיר את המבנה של מגוון צורות ולפתח את החשיבה הלוגית-דדוקטיבית שלהם. יש לזכור שאף שההתפתחות הגיאומטריה האוקלידית יש תפקיד מרכזי בהבנת המרחב שאנו חיים בו ובתיאורו, היא אינה מספקת כלים מתאימים כדי להסביר את כלל התופעות הקשורות לצורות ולאובייקטים שאינם מתנהגים בהתאם לבניית קבוצה או צפואה מראש, כגון מערכת כלי הדם, רשתות של נהרות או אורכו של קו חוף. ההסבר של תופעות מסווג זה דורש ממורים להיות בעלי ידע בגיאומטריה פרקטלית, שכן היא זו שמספקת הסברים לתופעות טבעיות שלגיאומטריה האוקלידית אין מענה עבורן, וככזאת היא גם מציעה דרך חדשה לחשיבה על גיאומטריה (Chen, 2015). עם זאת, מובן שהגיאומטריה הפרקטלית אינה מספקת תשובה לכל התופעות שלא ניתן להן מענה במסגרת הגיאומטריה האוקלידית. לשם כך התפתחו גיאומטריות לא אוקלידיות נוספות, כגון גיאומטריה היפרבולית, גיאומטריה פרויקטיבית, גיאומטריה כדורית ועוד.

נשאלת אם כן השאלה, מהם אוטם מאפיינים של הגיאומטריה הפרקטלית, שהופכים את העיסוק במתמטיקה לא רק למATTR, אלא גם למהנה. כפי שתוכלו לראות בפרק הספר השונים, העצמים המתמטיים המכונים פרקטלים מבטאים עושר חזותי, מגוון וייחודיות. היבטים החזותייםאפשרים את חוש הראייה של הלומדים ואת האינטיגנציה הרגשית שלהם לצורך יצירת הנעה ללמידה מתוך הנאה (Raiteri, 2005). בנוסף לכך, הגיאומטריה הפרקטלית מאפשרת לחבר בין נושאים מתמטיים הכלולים בתוכנית הלימודים, ואף בין המתמטיקה לבין תחומי דעת אחרים. לכן היא יכולה לשמש כבסיס לביצוע פעילויות חקר ולהוביל את התלמידים לגלוות תוכנות בלתי מוכנות, וכך לתמוך בהתפתחות הסקרנות שלהם ללמידה. גישה זו עולה בקנה אחד עם ההכרה ההולכת וגוברת

בחשיבות החינוך לפי מודל STEAM (Science, Technology, Engineering, Art) (and Mathematics), המשלב בין מדעים, טכנולוגיה, הנדסה, אומנות ומתמטיקה.

### **מבנה הספר**

הספר כולל חמישה פרקים, כאשר ארבעת הפרקים הראשונים חושפים בפניהם הקוראים כמה ממאפייני הפרקטלים ותכונותיהם ומובילים להגדלה של המושג "פרקטלי", והפרק החמישי מתאר את המפגש האישי של כל אחת מכותבות הספר עם נושא הfractals ועם הוראותו.

**בפרק הראשון** נתוודע אל הגיאומטריה הפרקטלית ונכיר שלוש דרכי אפשריות לייצרת סוג מסוים של Fractals: Fractals ליניאריים. בפרק השני עוסק בקשרים המפתחים בין מידת היקף של Fractals ליניארים לבין שטחם, תוך העמקת התובנות לגבי המשמעות של היקף, צורה ומשטח של צורה ולגבי הקשרים הדינמיים בין שטח לבין מידת היקף. כמו כן עוסוק באופן אינטואיטיבי במושג האין-סוף. בפרק השלישי נדון במשמעות של דמיון עצמי ונחקורסוגיות הקשורות לקנה מידה. בפרק הרביעי נערוך היכרות עם המשמעות של "幡幡 Fractal", שהוא שונה מהמשמעות המוכרת של幡幡 בגיאומטריה האוקlidית. המושג "幡幡 Fractal" מאפשר לנו לנתח סוף-סוף הגדלה פורמלית של המושג "Fractal". הפרק החמישי מציג סיכום אישי קצר של המסע שככל אחת מאיתנו עברה מאז שנחשה לנושא הfractals וכן במהלך כתיבת הספר, וכן מבחר דוגמאות מתוך הניסיון שצברנו בשילוב נושאים נבחרים בגיאומטריה Fractal במסגרות שונות.

כל אחד מרבעת הפרקים הראשונים בניו מארבעה חלקים:

- **הסבר תאורטי כללי** לגבי הנושאים הכלולים בפרק, תוך קישורם לתופעות מחיי היום-יום ויצירת הבנה אינטואיטיבית שלהם, ולאחר מכן פיתוח מתמטי של הנושאים ודיון בהם.
- **"פסק זמן Fractal"**: ביטויים של Fractals בתחום המדע, הטבע, העיצוב, הארכיטקטורה והאומנות.
- **משימות חקר** ברמות חשיבה שונות ובמגוון של רמות ידע. המשימות נועדו להעמיק את הידע ואת התובנות על הנושאים שהוצעו בפרק. המשימות מלולות בהסבר על אודוט הרציונל העומד בסיסן, ובסיומן מופיעים פתרונות מפורטים. בחלק מהמשימות יש חזרה על תכנים שפורטו בחלוקת התאורטי של הפרק. מבנה זה מאפשר להתנסות במשימות מתוך ההקשר שלהם, גם ללא רקע קודם. • **רשימת המקורות** הנזכרים בפרק והפניות למקורות שהאיורים נלקחו מהם.

לסיוום, ברצוננו להודות לד"ר בלה ייעץ ממכון מופ"ת, על הליווי בכתיבת הספר ועל העורותיה והארותיה הטובות; לד"ר דודו רוטמן, לשעבר ראש הוצאת הספרים של מכון מופ"ת, ולד"ר תמי ישראלי שהחליפה אותו בתפקיד; לחני שושתרי, רכזת הוצאת הספרים של מכון מופ"ת, על הנכונות הגדולה להגיש סיווע בכל עת ובכל עניין; לשני המעריכים של הספר - ד"ר אליא אפלבויים וד"ר גדי אלכסנדרוביץ', על הקריאה הקפדנית ששסיעה לנו לדיק בהתיחסותנו ולהעמיך אותה; למיכל קירזנר-אפלבויים על העריכה הלשונית המקצועית; לבלה טאובר על השעות הרבות שהקדישה לעיצוב הספר; ולגיא הود על האירורים השזורים בפרקii הספר ועל עיצובה הכריכה על בסיס יצירה של ליורה נוטוב.

אנו מalachot לכם מפגש מהנה עם פרקטלים,  
ליורה נוטוב, עטורה שרייקי ולובה ויסוצ'אנסקי

אפריל 2020

### רשימת מקורות

- נותוב, ל' (2015). אני ופרקטלים אחרים. *מספר חזק 2000*, 26, 15-22.
- נותוב, ל' ועזריאל, ל' (1996). משולש שיירפינסקי וציורו במחשב. *על"ה*, 18, 17-21.
- נותוב, ל' ושריקי, ע' (2018). מעבר לאוקlidס: פרקטלים כמקור לפעילויות חקר בגיאומטריה. בתוך א' לבנברג וד' פטקין (עורכים), *גיאומטריה פנים רבות לה - מן המחקר אל המעשה בהוראת גיאומטריה* (עמ' 305-351). מכון מופ"ת.
- שריקי, ע' ונותוב, ל' (2019). התרומה של קהילתית חקר לומדת של מורה-תלמידים להפתוחות מקצועית של מורים למתמטיקה בבית הספר הייסודי. *ביטחון מכוון מופ"ת: מחקר, כתיבה והפתוחות מקצועית בהכשרת מורים*, 36, 27-34.
- Brincks, L. (2005). *Fractals and chaos: A creative component*. Unpublished master's thesis, Iowa State University, Ames.
- Chen, S. (2015). *Assessing awareness, interest, and knowledge of fractal geometry among secondary mathematics teachers in the United States and China*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Southern Mississippi. <http://aquila.usm.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1144&context=dissertations><sup>1</sup>

---

1 כל הקישורים המופיעים בספר מעודכנים לאפריל 2020.

- Forster, P. (1997). Using fractals to teach complex numbers with a constructivist approach. *Australian Senior Mathematics Journal*, 11(2), 14-22.
- Fraboni, M., & Moller, T. (2008). Fractals in the classroom. *The Mathematics Teacher*, 102(3), 197-199.
- Gires, A., Villepoux, M., & Rouellé, V. (2014). *Teaching (an introduction to!) fractals and rainfall features in kinder garden*. Vienna, Austria: EGU General Assembly. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014EGUGA..16.6772G>
- Hui, T., & Lam, T. T. (2013). On the teaching of the representation of complex numbers in the Argand diagram. *Learning Science and Mathematics*, 8, 5-86.
- Ko, Y., & Park, N. (2011). Experiment verification of teaching fractal geometry concepts using a logo-based framework for elementary school children. In T. Kim, H. Adeli, D. Slezak, F. E. Sandnes, X. Song, K. Chung, & K. P. Arnett (Eds.), *Future generation information technology: Third international conference, FGIT 2011 in conjunction with GDC 2011, Jeju Island, Korea, December 8-10, 2011. Proceedings* (pp. 257-267). Springer.
- Lesmoir-Gordon, N. (2018). *Clouds are not sphere: A portrait of Benoit Mandelbrot. The founding father of fractal geometry*. World Scientific.
- Lornell, R., & Westerberg, J. (1999). Fractals in high school: Exploring a new geometry. *Mathematics Teacher*, 92(3), 260-269.
- Mandelbrot, B. B. (2002). Fractals, graphics, and mathematics education. In M. L. Frame & B. B. Mandelbrot, *Fractals, graphics, and mathematics education* (pp. 21-28). Mathematics Association of America.
- Movshovitz-Hadar, N. (2008). Today's news is tomorrow's history: Interweaving mathematical news in teaching high-school math. In E. Barbin, E. Stehlíkova, & N. C. Tzanakis (Eds.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the fifth European Summer University* (pp. 535-546). Vyadvatelsky Press.
- Nutov, L. (2017). Diminishing epistemic authority: A lever for mathematics teachers' professional development. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh,

- & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 41)* (Vol. 3, pp. 321-328). PME.
- Nutov, L., & Shriki, A. (2016, July). *Teacher and students as a collaborative inquiry learning community: A means for teachers' professional development*. Paper presented at the 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Germany.
- Raiteri, A. C. (2005, July). *An action research on line to introduce fractals in the teaching and learning of mathematics from primary to secondary school*. Paper presented at CIEAEM 57, Italy.  
[http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57\\_codetta.pdf](http://math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem57_codetta.pdf)
- Shriki, A., & Nutov, L. (2016). Fractals in the mathematics classroom: The case of infinite geometric series. *Learning and Teaching Mathematics*, 20, 38-42.
- Siegrist, R., Dover, R., & Piccolino, A. (2009). Inquiry into fractals. *Mathematics Teacher*, 103(3), 206-212.
- Stanley, H. E. (1989). Learning concepts of fractals and probability by "doing science". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 38(1), 330-340.
- Vacc, N. (1999). Exploring fractal geometry with children. *School Science and Mathematics*, 99(2), 77-83.