פרקים נבחרים

בתולדות המתמטיקה בעת העתיקה

מצרים, בבל והודו

עטרה שריקי

Selected Chapters in the History of Mathematics in Antiquity
Egypt, Babylon and India

Atara Shriki

כתיבה: **עטרה שריקי**, מכללת סמינר הקיבוצים

הוצאת הספרים של מכון מופ"ת:

עורכת ראשית: **תמי ישראלי**

עורכת אקדמית: **בלה יעבץ**

עורכת תוכן ולשון: **מיכל קירזנר-אפלבוים**

עורכת גרפית ומעצבת העטיפה: **תמר בן בסט**

חברי הוועדה האקדמית של הוצאת הספרים:
פרימה אלבז-לוביש, חנוך בן-פזי, יעל דר, יורם הרפז, נצה מובשוביץ-הדר, אייל נווה, יעל פישר, שי פרוגל

עשינו כמיטב יכולתנו לאתר את בעלי זכויות היוצרים של כל חומר ששולב בספר ממקורות חיצוניים. אנו מתנצלים על כל השמטה או טעות. אם יובאו אלה לידיעתנו, נפעל לתקנן במהדורות הבאות.

מסת"ב: 978-965-530-232-5

© כל הזכויות שמורות למכון מופ"ת, תשפ"ד/2024

טל': 03-6901428 http://www.mofet.macam.ac.il

הדפסה: דפוס הניצחון

תוכן העניינים

הקדמה

ספר זה עוסק בכמה מציוני הדרך בתולדות המתמטיקה בתקופה שקדמה לתחילת הספירה הנוצרית. הספר נועד לשמש כספר לימוד בקורסים אקדמיים ולא אקדמיים העוסקים בתולדות המתמטיקה, לסייע למורים לשלב באופן מושכל תכנים מתוך ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה השוטפת ולאפשר לקהל הרחב להיחשף לנושא המרתק והמופלא של התפתחות המתמטיקה.

הדיון בסוגיית שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה קיבל תשומת לב רבה בעשורים האחרונים. בתשובה לשאלה מדוע לטרוח ללמוד את תולדות המתמטיקה, ישראל קליינר (Kleiner, 2010) מצטט את דברי עמיתו אייב שניצר (Abe Shenitzer): ״אפשר להמציא מתמטיקה בלי לדעת הרבה על ההיסטוריה שלה. אפשר להשתמש במתמטיקה בלי לדעת הרבה, אם בכלל, על ההיסטוריה שלה. אבל ללא ידע עמוק על ההיסטוריה של המתמטיקה, בלתי אפשרי להעריך אותה באופן מלא״ (שם, עמ׳ 268). בהקשר זה, המתמטיקאי ואיש החינוך ג׳ורג׳ פוליה (Polya, 1962) טען שכדי שמורים יוכלו ללמד היטב, עליהם לפתח ״תחושה״ של תחום הדעת. לדעתו, מורים אינם יכולים לטפח בקרב תלמידיהם תובנות בנוגע לנחיצותו של תחום הדעת שהם מלמדים אם אינם חשים זאת בעצמם, והם אינם יכולים לחלוק עם תלמידיהם התלהבות מתחום הדעת, אם אינם נלהבים בעצמם. לכן, לדעתו של פוליה, רק אם תהיה למורים הערכה מלאה של המתמטיקה

והבנה של אופייה, מהותה והתפתחותה, הם יוכלו ללמד אותה באופן מיטבי. היכרות של מורים עם פרקים מתוך תולדות המתמטיקה יכולה גם לסייע להם להבין את נקודת מבטם של התלמידים, לזהות את קשייהם ולמצוא דרכים לעזור לתלמידים להתגבר על קשיים אלה (Siu & Tzanakis, 2004).

מלבד החשיבות המיוחסת להיכרות מעמיקה של אנשי חינוך מתמטי עם התפתחותה של המתמטיקה, קיימת חשיבות גם לחשיפתם של תלמידי בית הספר לנושא זה. אנשי חינוך מתמטי מאמינים שהיכרות עם תולדות המתמטיקה מאפשרת לתלמידים להבין את אופן ההתפתחות של מושגים מתמטיים במהלך השנים, התפתחות שלוותה בעבודה אינטלקטואלית מאומצת של אנשים אשר תרמו להתפתחותה של האנושות בכללותה (Panasuk & Bolinger Horton, 2012). יתרה מכך, התוודעות של התלמידים לתולדות המתמטיקה עשויה להגביר את העניין שלהם בלימוד תחום הדעת, לפתח בקרבם עמדות חיוביות כלפי מתמטיקה ולגרום להם להעריך אותה ואת תפקידה בהתפתחות הכללית של החברה. העיסוק בנושא יכול להפוך את המתמטיקה לאנושית וידידותית יותר, ולמיסטית ומאיימת פחות בעיני התלמידים. להיכרות עם ההיסטוריה של המתמטיקה יש תרומה גם בהיבט הקוגניטיבי, ויש בכוחה לקדם למידה והוראה באמצעות הצגת נקודות מבט שונות על טבעו ומקורו של הידע המתמטי, תוך חשיפת התלמידים לגישות שונות לאותו ידע (Bidwell, 1993; Fauvel, 1991; Helfgott, 2004; Jankvist, 2009).

עם זאת, היות שתוכנית הלימודים הבית ספרית במתמטיקה גדושה ורחבה, מובן שלא תמיד קל למורים למצוא את הדרך המיטבית לשלב את ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה השוטפת, ובו בזמן גם להספיק לכסות את כל תוכנית הלימודים המחייבת. בניסיון להתמודד עם קושי זה, התפתחו גישות שונות להנגשת תולדות המתמטיקה למורים ולתלמידים, שאפשר לחלקן לצמדים מנוגדים:

גישת ההארה לעומת גישת יחידות הלימוד: כדי לאפשר לעוסקים בחינוך מתמטי להכיר מקרוב את התפתחות המתמטיקה ואת הקשרים

התרבותיים והחברתיים שהניעו את התפתחותה, אפשר לנקוט אחת משתי גישות: "גישת ההארה" או "גישת יחידות הלימוד". בהתאם לגישת ההארה, הוראת נושאים מתמטיים מוצגת באופן אנקדוטי באמצעות מידע היסטורי אשר כולל שמות, תאריכים, תוצרי העשייה של מתמטיקאים, אירועים, ביוגרפיות, בעיות מפורסמות ועוד. הארות אלו אמורות לתבל את הוראת המתמטיקה. אפשרות נוספת היא הצגת טקסטים מתמטיים מקוריים, בין כהקדמה לפרק הלימוד ובין כסיום הנושא. לעומת זאת, גישת יחידות הלימוד גורסת שיש להציג ללומדים יחידות לימוד שלמות, בהיקפים שונים, המוקדשות להיסטוריה של המתמטיקה. בקצה האחד של הסקלה מוצגות יחידות קטנות המכילות אוסף תכנים המתאימים לשניים-שלושה שיעורים ומתמקדים באופן צר בנושא קטן שיש לו קשר הדוק לתוכנית הלימודים. במרכז הסקלה מצויות יחידות לימוד בעלות היקף רחב יותר, שיכולות להתאים ל-10-20 שיעורים ואין הכרח שיהיו קשורות באופן הדוק לתוכנית הלימודים במתמטיקה. יחידות כאלה מאפשרות להציג ללומדים ענפים של המתמטיקה שבדרך כלל אינם חלק מתוכנית הלימודים הבית ספרית, ואפשר לבסס אותן על קריאה של חומרים מקוריים, או על פרויקטים של תלמידים. בקצה השני של הסקלה אפשר למצוא קורס שלם, או ספרים, על ההיסטוריה של המתמטיקה. אלה כוללים מידע היסטורי, מידע על התפתחותם של מושגים ועוד, תוך הסתמכות על מקורות ראשוניים ו/או שניוניים (Tzanakis & Arcavi, 2000).

גישת ההתאמה הרדיקלית לעומת גישת ההפרדה הרדיקלית: מייקל פריד (Fried, 2001) סבור שהמתח בין הרצון לשלב בכיתה נושאים היסטוריים או גישה היסטורית לבין ההכרח שבהוראת הטכניקות המתמטיות, מוביל לאפשרות לאמץ אחת משתי גישות: "הפרדה רדיקלית" - הפרדה בין לימוד ההיסטוריה של המתמטיקה לבין מהלך ההוראה הרגיל של המתמטיקה (גישה המקובלת, בדרך כלל, בתוכניות להכשרת מורים למתמטיקה) או "התאמה רדיקלית" - הפיכת לימוד המתמטיקה לחקר טקסטים מתמטיים, תוך התייחסות לשאלות הנוגעות למחבר הטקסט, חיפוש אחר ההנחות המופיעות בטקסט, ועוד.

ההיסטוריה ככלי לעומת ההיסטוריה כמטרה: הבחנה דומה לזאת שהציע פריד (שם), תוארה על ידי אופה ג'נקוויסט (Jankvist, 2009): ההיסטוריה ככלי העוזר להוראת המתמטיקה וללמידתה, לעומת ההיסטוריה כמטרה העומדת בפני עצמה. לטענתו, ההתייחסות להיסטוריה ככלי קשורה לאופן שבו תלמידים לומדים מתמטיקה. היכרות עם ההיסטוריה של המתמטיקה יכולה להיות גורם מניע עבור התלמידים ולעורר בהם עניין ללמוד מתמטיקה. כמו כן היא יכולה להפוך את המתמטיקה להומנית יותר בעיני התלמידים וכך להפחית חרדת מתמטיקה. לעומת זאת, יישום הגישה של הוראת ההיסטוריה של המתמטיקה כמטרה העומדת בפני עצמה מתבטא בהתמקדות בהיבטים ההתפתחותיים והאבולוציוניים של המתמטיקה כתחום דעת, כאשר הכוונה אינה ללמוד באופן מעמיק יותר את המתמטיקה עצמה.

תהא גישת ההוראה שתיבחר אשר תהא, הספר שלפניכם נכתב מתוך הכרה בחשיבות של שילוב פרקים מתוך תולדות המתמטיקה במסגרת הוראתה ולמידתה. הבחירה בתוכני הספר נעשתה מתוך רצון לחשוף מרצים, מורי מורים, מורים ומתכשרים להוראה לתכנים רלוונטיים לתוכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי והעל-יסודי, ולעודד מורים לשלב את החומרים בכיתותיהם. התכנים שנבחרו עוסקים באריתמטיקה, באלגברה ובגיאומטריה, והם מתמקדים בכמה משיטות החישוב אשר התפתחו במצרים, בבבל ובהודו בעת העתיקה. למותר לציין שבתקופה שלפני הספירה התפתחה מתמטיקה לא רק בשלוש התרבויות הללו. מתמטיקה התפתחה בעת העתיקה בין השאר בקרב תרבות המאיה במרכז אמריקה, בסין וכמובן ביוון. המתמטיקה שהחלה להתפתח ביוון העתיקה כ-500 שנים לפני הספירה, היא נדבך רב חשיבות בתולדות המתמטיקה. המתמטיקה היוונית יצרה את מושג ההוכחה, ובמסגרתה התפתחו תחומים מרכזיים של המתמטיקה, כגון גיאומטריה, תורת המספרים ומתמטיקה שימושית, וכן הועלו רעיונות שהובילו בהמשך להתפתחות האנליזה המתמטית. ההנחה היא שמתמטיקה יוונית הייתה קיימת כבר במאה ה-7 לפני הספירה, אולם מסמכים ספורים בלבד שרדו מתקופה זו. אף שתרבויות קדומות כבר ביצעו "תצפיות מתמטיות" על

תופעות טבע ועל חיי היום-יום זמן רב לפני תקופתה של המתמטיקה היוונית, הרי שהיוונים, בניגוד לקודמיהם, לא קיבלו את הפרשנויות של תצפיות אלה כאמיתות מוחלטות. הם רצו לדעת מדוע התיאור הוא אמיתי, ודרשו לכך הוכחה. הצורך בהוכחה פיתח את התובנות בנוגע לרעיון של הסקת מסקנות תוך שימוש בכלים לוגיים. השאלות שהעלו המתמטיקאים היוונים וגישת ההוכחה שנקטו, הובילו לגילויים בתחומי הפיזיקה, הביולוגיה, הרפואה, הפוליטיקה וכמובן המתמטיקה. למעשה, היוונים ראו במתמטיקה בסיס של כל הלימודים על העולם הפיזיקלי. על המתמטיקה היוונית נכתבו שלל ספרים, ובמסגרת הספר הנוכחי לא התאפשר להקיף את העושר הטמון בה. בנוסף לכך, הספר אינו כולל נושאים מתמטיים שהם מעבר לנדרש מתלמידים במסגרת תוכנית הלימודים הבית ספרית.

מתוך האפשרויות השונות לארגון הספר, בין השאר לפי נושאים מתמטיים, באופן כרונולוגי, או בהתאם לתרבויות שהנושאים המתמטיים השונים התפתחו בהן, נבחרה האפשרות האחרונה. הבחירה שכל שער יעסוק בתרבות מסוימת ויציג את התפתחות המתמטיקה בה בהתאם לרצף הכרונולוגי, נועדה לשטוח בפני הקוראים את רצף ההתהוות ולאפשר להם לפתח תובנות בנוגע להשפעה של התקופה ושל הנסיבות התרבותיות על התפתחות המתמטיקה.

על אף שהספר בנוי במתכונת של יחידות לימוד, מורים ומורי מורים יכולים לבחור מכל פרק או יחידת לימוד את הנושאים המתאימים מבחינתם לשילוב בהוראה (למשל פתרון משוואות ריבועיות, חישוב שטח עיגול וכדומה), ולאפשר לתלמידים להשוות בין שיטות הפתרון השונות.

מבנה הספר

הספר כולל ארבעה שערים. שלושת השערים הראשונים מציגים באופן כמעט כרונולוגי את התפתחות המתמטיקה בעת העתיקה, והם מוקדשים, בהתאמה, למתמטיקה שהתפתחה במצרים, במסופוטמיה

ובהודו. השער הרביעי כולל פתרונות נבחרים לשאלות המופיעות בשלושת השערים הראשונים.

כל אחד מהשערים 3-1 מחולק לשלושה חלקים:

א. רקע על אודות המקום, התקופה והתנאים הסוציו-דמוגרפיים שתרמו להתפתחותה של המתמטיקה באותה העת;

ב. הצגת השיטות והרעיונות המתמטיים והרציונל שעמד מאחורי התפתחותם;

ג. שאלות פתוחות לחשיבה ולניווט הקריאה העצמאית ותרגילים שנועדו להעמיק את הידע ואת התובנות: התרגילים בנויים במתכונת של שאלות רב-ברירה, מתוך מטרה להקל על הקוראים את בדיקת נכונות תשובותיהם. עם זאת, מובן שמומלץ לפתור כל תרגיל באופן מלא ולאחר מכן להשוות עם הפתרונות המופיעים בשער הרביעי.

החלק הראשון של כל פרק מתאר את ההיבטים ההיסטוריים של התקופה הנדונה, לטובת קוראים המעוניינים בהיכרות מעמיקה עם התקופות השונות. בסוף כל אחד מהפרקים מופיעה רשימת מקורות ששימשו לצורך כתיבת הפרק.

אני מאחלת לקוראים הנאה מעצם הקריאה וההתעמקות בכמה מציוני הדרך בהתפתחות המתמטיקה. תקוותי היא שמרצים, מורי מורים ומורים למתמטיקה ישתמשו בספר באופן מושכל בעבודתם עם סטודנטים, עם פרחי הוראה ועם תלמידים, תוך פיתוח ההערכה שלהם כלפי אותו דור של "חלוצי המתמטיקה" והתפעלות מהישגיהם.

לסיום, ברצוני להודות מעומק ליבי לכל אלו שתמכו וסייעו להוצאתו של ספר זה: לצוות הוצאת הספרים של מכון מופ"ת ובעיקר לד"ר בלה יעבץ, על הערותיה ועצותיה הטובות במהלך כתיבת הספר; לד"ר דודו רוטמן, לשעבר ראש הוצאת הספרים של מכון מופ"ת, ולד"ר תמי ישראלי שהחליפה אותו בתפקיד, על תמיכתם בהוצאת הספר; לגב' חני שושתרי, רכזת הוצאת הספרים של מכון מופ"ת, על הזמינות, על הנכונות ועל הסיוע השוטף והתומך; למיכל קירזנר-אפלבוים על העריכה הלשונית

הקפדנית והמקצועית; ולמעצבת הגרפית בלה טאובר על תרומתה להפקת הספר. כמו כן אבקש להודות לשני המעריכים של הספר, פרופ׳ אברהם הרכבי ופרופ׳ אביקם גזית, על הקריאה הדקדקנית ועל ההערות וההארות אשר סייעו לי להעמיק את התכנים; ולד״ר תמר בן בסט על העיצוב והעימוד של הספר ועל העמידה בכל האתגרים הלא פשוטים שהיו כרוכים בכך.

עטרה שריקי

מאי 2024

רשימת מקורות

Bidwell, J. K. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. *Mathematics Teacher, 93*(8), 461-464.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*, 3-6.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education, 10*, 391-408.

Helfgott, M. (2004). Two examples from the natural sciences and their relationship to the history and pedagogy of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 147-164.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 235-261.

Kleiner, I. (2010). *Excursions in the history of mathematics*. Birkhäuser.

Panasuk, R. M., & Bolinger Horton, L. (2012). Integrating history of mathematics into curriculum: What are the chances and constraints? *International Electronic Journal of Mathematics Education, 7*(1), 3-20.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Vol. 1 & 2). John Wiley & Sons.

Siu, M. K., & Tzanakis, C. (2004). History of mathematics in classroom teaching: Appetizer? Main course? Or dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), v-x.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 201-240). Kluwer Academic Publishers.

מבוא לתולדות המתמטיקה

בספרו **קיצור תולדות האנושות** מסרטט יובל נח הררי (2011) נקודות ציון מרכזיות על ציר הזמן של התפתחות האנושות מאז היווצרו של כדור הארץ לפני כ-4.5 מיליארדי שנים. בני האדם החלו להתפתח לפני כ-2.5 מיליוני שנים, ואלה המוכרים לנו כיום החלו להתפתח לפני כ-200,000 שנים מהמין האנושי המכונה בשם "האדם החושב" או "האדם הנבון" (Homo sapiens). התהליך האבולוציוני ממשיך להתקיים גם בתקופתנו, אולם כיוון ששינויים אבולוציוניים ניכרים לעין רק לאחר אלפי שנים, אי-אפשר כמובן להצביע על שינויים שהתרחשו במהלך מאות השנים האחרונות.

מתי התחילו בני האדם לעסוק במתמטיקה ומדוע?

אף שהאדם הנבון החל להתפתח לפני כ-200,000 שנים, הרי שהממצאים הארכאולוגיים המעידים על יכולת האדם לספור ולמנות, מתוארכים לתקופה של לפני כ-50,000 שנים. כיום, על בסיס שרידים ארכאולוגיים המשקפים את המודעות האנושית לפעולות על מספרים, לספירה, לתבניות ולצורות גיאומטריות, משערים החוקרים שהמתמטיקה החלה להתפתח עקב הצורך לספור, למנות ולתעד כמויות, ונראה שבמרבית הציוויליזציות העתיקות התקיימה צורה כלשהי של ספירה ו/או מנייה, או לכל הפחות דרך כלשהי להתאים בין אוסף של חפצים לבין אפיון מסוים שלהם (Joseph, 2011; Merzbach & Boyer, 2011).

החפץ המתמטי הקדום ביותר שנמצא עד כה הוא *עצם הלבומבו* (איור 1א), חתיכה מעצם רגלו של בבון, שגילה מתוארך ל-37,000 שנים. העצם התגלתה בחפירות שנערכו בשנת 1970 במערת הגבול בהרי לבומבו שבין דרום אפריקה לבין אסווטיני (סווזילנד), ומופיעים עליה עשרים ותשעה חריצים. לדעת חלק מהחוקרים, חריצים אלה מעידים על ניסיונות לתאר את מחזוריות מופע הירח (Joseph, 2011). אחרים (למשל, Zaslavski, 1991) סבורים שייתכן שנשים אפריקניות נעזרו בכך לצורך חישוב של מעגלי המחזור החודשי שלהן. אם אכן כך הדבר, הרי שהנשים האפריקניות היו המתמטיקאיות הראשונות הידועות לנו כיום.

חפץ קדום נוסף הקשור למתמטיקה הוא **עצם האישנגו** (איור 1ב), שאף היא מרגלו של בבון. צורתה מוארכת, ובאחד מקצותיה מצויה חתיכת קוורץ חדה שכנראה שימשה לצורך חריטה. עצם זו התגלתה בשנת 1960 בחפירות באזור אישנגו על גבול קונגו ואוגנדה, המצוי בסמוך למקורותיו של הנילוס, והיא מתוארכת לפרק הזמן שבין 18,000-20,000 שנים לפני הספירה. בחפירות אלה נמצאו גם שרידים של בני אדם, כלי דיג וציד וכן כלים לייצור מזון, כגון אבנים לטחינת תבואה. כיום נמצאת העצם במוזיאון לתולדות הטבע בבריסל (Williams, 2005).

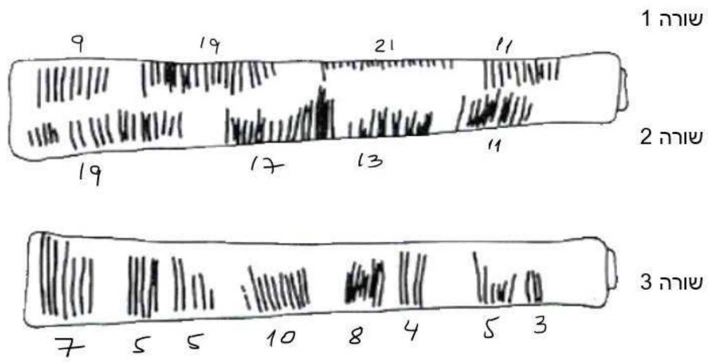
ב א

איור 1: **עצם הלבומבו (א) ועצם האישנגו (ב)**

כפי שאפשר לראות להלן באיור 2, משני צדדיה של עצם האישנגו מופיעות סדרות של חריצים המסודרות בשלוש שורות (בצד אחד מופיעה שורה אחת, ובצד האחר מופיעות שתי שורות). הקיבוץ הא-סימטרי של החריצים מעיד שלא סביר שמדובר בקישוט סתמי, ונראה שהחריצים מייצגים תובנה מתמטית כלשהי, שהיא מעבר לספירה. שורה 1 מכילה

ארבע קבוצות חריצים עם 9, 19, 21 ו-11 סימנים, בסך הכול שישים חריצים. יש הרואים בכך עדות לספירה בבסיס 10, שכן מדובר במספרים 20+1, 20-1, 10+1, 10-1, אם כי לא בסדר זה. שורה 2 מכילה גם היא ארבע קבוצות חריצים, בהן 19, 17, 13 ו-11 סימנים. גם בשורה זאת מספר החריצים הכולל הוא 60, ויש לשים לב לכך שמדובר במספרים הראשוניים בין 10 ל-20. בשורה 3 מופיעות שמונה קבוצות חריצים, עם 7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3 סימנים. אם נתייחס לתת-הקבוצות (5,5,10), (4,8), (3,6), ייתכן שמדובר בגילוי של תובנות בנוגע למשמעות של כפל ב-2 (Joseph, 2011).

עם זאת, יש לזכור שעל סמך עצם אחת בלבד, קשה להסיק מסקנות מרחיקות לכת בנוגע ליכולת החישובית של אנשי האישנגו או בנוגע ליכולת שלהם לבצע תיעוד של מציאות כלשהי.



איור 2: **חריצים על עצם האישנגו**

תחילת השימוש במספרים לצורכי מסחר

כפי שנראה בשער השני העוסק במתמטיקה שהתפתחה במסופוטמיה, השימוש במספרים לצורכי מסחר החל לפני כ-10,000 שנים באזור ארם נהריים, כאשר הלבלרים של העת העתיקה נדרשו לנהל מעקב אחר הכנסות והוצאות (סטיוארט, 2012). בתקופה זו טרם הומצא הכתב (הכתב הומצא לפני כ-5,000 שנה והחל להתפתח במצרים ובדרום מסופוטמיה), ולמספרים טרם הותאמו סמלים כלשהם (אונגורו, 1989). לצורך ניהול מעקב אחר החשבונות, הלבלרים של מסופוטמיה השתמשו באסימוני

חרס קטנים (איור 3), חלקם בצורת חרוט, חלקם בצורת כדור או ביצה ואחרים בצורת גליל, פירמידה או דיסק עגול שטוח (סטיוארט, 2012). נראה שהאסימונים הללו ייצגו כמות מסוימת של מצרכים של אותם הימים (לדוגמה, כדורי חרס ייצגו מספר מסוים של גרעיני תבואה, גלילים ייצגו מספר מסוים של בעלי חיים, ביצים ייצגו מספר כלשהו של כדי שמן).

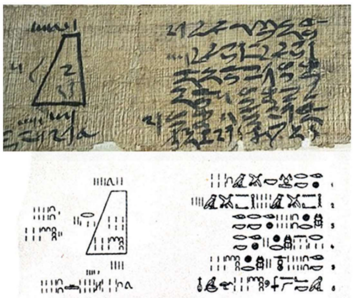
איור 3: **אסימוני החרס של מסופוטמיה**

האסימונים המוקדמים ביותר שנמצאו מתוארכים ל-8,000 שנים לפני הספירה, והיו בשימוש במשך כ-5,000 שנים. במהלך השנים הללו הפכו האסימונים למשוכללים ולייחודיים יותר ויותר. יתרונם של האסימונים היה באפשרות למיין אותם לסוגים שונים, אולם חסרונם היה בקלות שבה הם ניתנים לזיוף. לכן, כדי להבטיח שהחשבונות לא יזויפו, הלבלרים עטפו את האסימונים בעטיפות חרס, בתוספת חותם רשמי בצורת גליל. לאחר שבירת העטיפה, היה אפשר לדעת כמה אסימונים יש בתוכה ומאיזה סוג, וכן להוסיף או להחסיר אסימונים ולאחר מכן ליצור עטיפה חדשה לאחסון עתידי. עם הזמן, לשם ייעול התהליך ומניעת הצורך בשבירת העטיפה כדי לדעת כמה אסימונים יש בתוכה, הלבלרים החלו

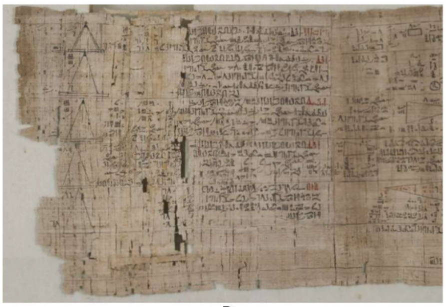
לסמן על העטיפה רשימת סמלים, בהתאם למספר האסימונים שבתוכה (למשל, אם בתוך העטיפה היו שבעה כדורים, חרטו על מעטפת החרס, בעודה רטובה, שבעה כדורים). מהלך זה הוביל להתפתחות התובנה שלפיה למעשה כלל אין צורך בתכולה ואפשר להסתפק בעטיפה עצמה. מכאן כבר הייתה הדרך קצרה לרעיון של יצירת קבוצה כתובה של סמלי מספרים בעלי צורות שונות, בהתאם לסוגי הסחורה. איאן סטיוארט (2012) מעיר שנראה שהחלפת האסימונים במספר כלשהו של סמלים מציינת את הולדת הכתב עצמו.

עדויות ראשונות לטקסטים מתמטיים

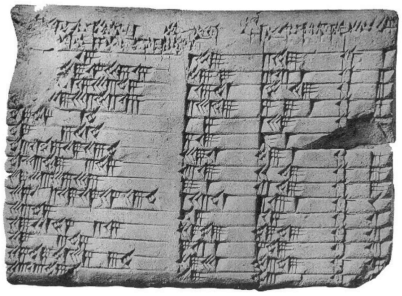
אף שהעיסוק במתמטיקה החל לפני אלפים רבים של שנים, היות שהכתב הומצא רק לפני כ-5,000 שנים, אין כל פליאה בכך שהטקסטים המתמטיים הממשיים הקדומים ביותר שנמצאו, נכתבו רק לפני כ-4,000 שנים. הכתב הופיע לראשונה בממלכת שומר במסופוטמיה וזמן קצר לאחר מכן גם במצרים, ואכן הטקסטים המתמטיים העתיקים ביותר המצויים בידינו כיום הם ממצרים העתיקה ומבבל אשר במסופוטמיה. הטקסטים הבולטים ביותר ביניהם הם פפירוס מוסקבה, פפירוס רינד, לוח פלימפטון 322 וסוטרות השולבא. פפירוס מוסקבה (איור 4א) עוסק במתמטיקה מצרית ומתוארך לשנת 1850 לפני הספירה. פפירוס רינד (איור 4ב) עוסק גם הוא במתמטיקה מצרית ומתוארך לשנת 1650 לפני הספירה. לוח פלימפטון 322 (איור 4ג), העוסק במתמטיקה בבלית, מתוארך לתקופה שבין 1800 ל-1600 לפני הספירה. מקור חשוב נוסף, סוטרות השולבא (איור 4ד), עוסק במתמטיקה הודית ומתוארך לשנת 800 לפני הספירה.



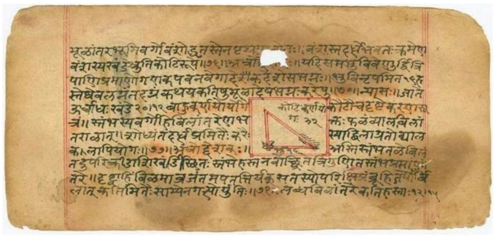
א



ב



ג



ד

איור 4: **הטקסטים המתמטיים העתיקים פפירוס מוסקבה (א), פפירוס רינד (ב), לוח פלימפטון 322 (ג) וסוטרות השולבא (ד)**

בפרקים הבאים נלמד על מקורות אלה ועל המתמטיקה המופיעה בהם.

האם מתמטיקה היא תגלית או המצאה?

עתה, משנחשפנו בקווים כלליים לכמה מאבני הדרך שציינו את התפתחותה של המתמטיקה, נוכל לחשוב על אחת השאלות המעסיקות מתמטיקאים ופילוסופים: האם מתמטיקה היא תגלית או המצאה? המשמעות של תגלית היא גילוי של דבר שהיה קיים, אך לא היה ידוע לבני אדם קודם לכן. לדוגמה, האטום, יבשת אמריקה, מערכת השמש ותופעות נוספות רבות מספור התגלו ונחשפו על ידי בני האדם במהלך השנים, ויש לשער שדברים נוספים ייחשפו גם בעתיד. בניגוד לגילוי, המצאה היא יצירה של דבר מה חדש, דבר שלא היה קיים קודם. בין ההמצאות החשובות אפשר לציין את המצאת הכתב, הנורה החשמלית, הטלפון, המחשב, המכונית, ועוד המצאות רבות ומגוונות.

טבעי ומתבקש להציג את שאלת הגילוי וההמצאה בקשר למתמטיקה. אם נתמוך באמירה שמתמטיקה היא תגלית, המשמעות היא שהמוח

האנושי, בכוח המחשבה, לא המציא את המתמטיקה, שכן היא כבר הייתה "קיימת". חוקי המתמטיקה מתקיימים בין שהם ידועים לבני האדם ובין שלא, בדומה לכך שהאטום, למשל, היה קיים עוד טרם גילויו. המוח האנושי הוא זה שחושף ומגלה את אותם החוקים. בהקשר זה, מריו ליביו (2010) בספרו **האם אלוהים הוא מתמטיקאי?** מצטט מדבריו של הפיזיקאי הבריטי ג'יימס ג'ינס: "היקום נראה כאילו עיצב אותו מתמטיקאי טהור" (שם, עמ' 11), ומדבריו של אלברט איינשטיין: "כיצד ייתכן שהמתמטיקה, פרי המחשבה האנושית שאינו תלוי בהתנסות, מתאימה באורח כה מושלם לעצמים של המציאות הפיזיקלית?" (שם, עמ' 12). מאמירות אלה עולה שלא זו בלבד שהמתמטיקה אינה המצאה אנושית, אלא היא חלק בלתי נפרד מהיקום, מהטבע, מהמדע ומהחברה, וכוחה של המחשבה האנושית הוא זה שאפשר לגלות אותה ולחשוף את הקשר שלה ליקום. ליביו מסכם תפיסה זו במילים הבאות: "היקום כפוף לשלטונה של המתמטיקה, או לכל הפחות ניתן לפענוח באמצעות המתמטיקה" (שם, עמ' 17).

כיום ברור לכול שללא גילויים מתמטיים, החברה האנושית בת זמננו לא הייתה יכולה לתפקד כפי שהיא מתפקדת. אלמלא המתמטיקה, כל אותם דברים שנראים לנו כיום מובנים מאליהם (טלפונים ניידים, מחשבים, טלוויזיה, מטוסים, מערכות ניווט לוויניות ועוד) לא היו בנמצא. בחיבורו "התנצלותו של מתמטיקאי" הצהיר המתמטיקאי הבריטי הרולד הארדי ש"שום תגלית מתגליותיי, אין בה וקרוב לוודאי שלעולם לא יהיה בה, במישרין או בעקיפין, לטוב או לרע, שמץ של תועלת לטובת העולם" (התרגום מתוך ליביו, 2010, עמ' 15). אולם עם השנים התברר שהמתמטיקה ה"טהורה" שפיתח הארדי מתארת באופן בלתי צפוי תופעות בתחום האבולוציה, הפיזיקה הקוונטית ותורת ההצפנה. מדבריו של הארדי אפשר ללמוד שאף שרבים מהמתמטיקאים מוּנעים מההיבט הפילוסופי, האינטלקטואלי והאסתטי של הגילויים המתמטיים, בכל זאת לרבים מהגילויים המתמטיים יש יישום מעשי שתרם לפריצות דרך בתחומי החיים השונים.

לסיכום, כפי שאפשר להבין מההקדמה הקצרה, התפתחותה של המתמטיקה משתרעת על פני תקופה של אלפי שנים. במהלך קריאת הספר נתוודע אך למקצת מאבני הדרך שהתוו את התפתחותה, ובעיקר לחלקים מהמתמטיקה המצרית, הבבלית וההודית שהתפתחה עד לתחילת הספירה הנוצרית. גם כיום ממשיכה המתמטיקה להתפתח. העיתון *Mathematical Reviews*, העוקב אחר כל פרסום חדש במתמטיקה, ממיין אותה לכמאה תחומים עיקריים, המחולקים לאלפי התמחויות. מדי שבוע נוצרת מתמטיקה רבה יותר מכל מה שנעשה במהלך השנים שלפני הספירה. כיום יש בעולם למעלה מ-50,000 מתמטיקאים חוקרים פעילים, המפרסמים למעלה ממיליון עמודים של מתמטיקה חדשה מדי שנה (סטיוארט, 2012). המעוניינים להתעדכן בחידושים המתמטיים המוצגים בשפה פופולרית, יכולים לפנות לאתר: http://plus.maths.org/content.

אסיים את פרק המבוא בהערה עקרונית: בהמשך הספר אתייחס לחלקים מתוך המתמטיקה המצרית והמתמטיקה הבבלית תוך שימוש במילים "אלגברה מצרית" ו"אלגברה בבלית". למותר לציין שבתקופה שבה נכתבו הטקסטים המתמטיים הקדומים, המשמעות של אלגברה כפי שהיא מקובלת כיום, לא הייתה קיימת. המילון המתמטי של וולפרם (Wolfram MathWorld, ראו https://mathworld.wolfram.com/Algebra.html) מגדיר את האלגברה כחקר מופשט של מערכות מספרים והפעולות שבתוכן, כולל נושאים מתקדמים כמו קבוצות ומבנים אלגבריים (שדות, חבורות, חוגים ועוד). תחום זה של האלגברה מכונה לעתים קרובות בשם "אלגברה מופשטת". המילה "אלגברה" יכולה להתייחס גם לאלגברה בית ספרית (או "אלגברה בסיסית"), הנלמדת בבתי הספר העל-יסודיים. בהקשר זה הכוונה היא לפתרון משוואות פולינומיאליות (בדרך כלל במשתנה אחד או שניים) ולתכונות בסיסיות של פונקציות וגרפים. התחום האחר של אלגברה מתייחס למרחב וקטורי מעל שדה, הסגור לפעולות מוגדרות.

בהתאם לכך, מובן מאליו שהעולם המתמטי העתיק לא עסק באלגברה. מייקל פריד (Fried, 2001) מדגיש את העובדה שהטקסטים הקדומים

מייצגים "גיאומטריה אלגברית" ולא "אלגברה", שכן הניסוחים המקוריים הם בשפה גיאומטרית, נטולת סמלים, אף שהנטייה שלנו כיום היא לפתור את הבעיות שהוצגו, למשל בפפירוסים המצריים, באמצעות תרגום הניסוחים לשפה אלגברית, ובתוך כך גם לנסות להתחקות אחר הלוגיקה שאולי הנחתה את צעדיהם של המתמטיקאים המצרים. ניתוח חלקים מתוך העשייה המתמטית המופיעה בטקסטים הקדומים יתואר בהמשך ספר זה באמצעות פרספקטיבה אלגברית בסיסית, ולכן אף על פי שברור שבפועל לא מדובר באלגברה, לצורך פשטות הניסוח בכל זאת אכנה את העשייה הרלוונטית בשער הראשון ובשער השני בשם "אלגברה מצרית" ו"אלגברה בבלית", בהתאמה.

באופן דומה, אפשר לומר שההתייחסות המקובלת כיום לענף המתמטי "אריתמטיקה", ענף העוסק בחישובים מספריים באמצעות שימוש בפעולות החיבור, החיסור, הכפל והחילוק וכן בפירוק לגורמים, בהעלאה בחזקה ובהוצאת שורש, אינה מתבטאת באופן מלא בטקסטים העתיקים. במובן זה, היה אפשר להתייחס לאריתמטיקה העתיקה כאל "חישובים", אולם בהמשך ספר זה, מטעמי נוחות, אכנה חישובים אלה בשם "אריתמטיקה".

רשימת מקורות

אונגורו, ש' (1989). **מבוא לתולדות המתמטיקה, חלק א: הזמן העתיק וימי הביניים**. משרד הביטחון - ההוצאה לאור.

הררי, י"נ (2011). **קיצור תולדות האנושות**. כנרת, זמורה-ביתן, דביר.

ליביו, מ' (2010). **האם אלוהים הוא מתמטיקאי?** (ע' לוטס, מתרגם). אריה ניר, הוצאה לאור.

סטיוארט, א' (2012). **לאלף את האינסוף: סיפורה של המתמטיקה** (נ' מובשוביץ-הדר, מתרגמת). ספרי עליית הגג, ידיעות אחרונות, ספרי חמד.

Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education, 10*, 391-408.

Joseph, G. G. (2011). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics* (3rd edition). Princeton University Press.

Merzbach, U. C., & Boyer, C. B. (2011). *A history of mathematics* (3rd edition). John Wiley & Sons, Inc.

Williams, S. W. (2005). The oldest mathematical object is in Swaziland. *Mathematicians of the African Diaspora*. http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/lebombo.html

Zaslavsky, C. (1991). Women as the first mathematicians. *International Study Group on Ethnomathematics Newsletter*, 7(1). https://web.nmsu.edu/~pscott/isgem71.htm

מקורות האיורים (הקישורים מעודכנים למאי 2023)

איור	מקור
1א	https://en.wikipedia.org/wiki/Lebombo_bone
1ב	https://en.wikipedia.org/wiki/Ishango_bone
2	https://en.wikipedia.org/wiki/Ishango_bone
3	https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/16/Clay_accounting_tokens_Susa_Louvre_n1.jpg
4א	https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Papyrus_moscow_4676-problem_14_part_1.jpg
4ב	https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057
4ג	https://en.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322
4ד	https://www.facebook.com/photo/?fbid=1669616726625116&set=pb.100063748667912.-2207520000.

תרגילים ושאלות לפרק המבוא לתולדות המתמטיקה

1. תארו שתי המצאות שלמיטב ידיעתכם משתמשים בהן כיום במתמטיקה, וציינו באופן כללי מהו התפקיד של המתמטיקה בהמצאות אלה.
2. כאמור, ממצאים ארכאולוגיים מצביעים על כך שכבר לפני כ-50,000 שנים החלו בני האדם לִמנות. הציעו רעיונות לצרכים שהניעו בני אדם למנות (למשל, רועה צאן שרצה לדעת שכל העדר שלו חזר הביתה), ורעיונות לגבי האופן שבו היו יכולים לעשות זאת לפני התפתחותו של מושג המספר.